



# **Efeitos da Política Monetária num Modelo de Crescimento Endógeno baseado em atividades de I&D**

por

Gustavo Paulino Iglésias

**Dissertação de Mestrado em Economia**

Faculdade de Economia da Universidade do Porto

Orientado por:

Pedro Rui Mazedo Gil

2017

---

## **Nota Biográfica**

Gustavo Paulino Iglésias nasceu em Espinho, no dia 24 de maio de 1988. Em julho de 2015, concluiu a Licenciatura em Economia na Faculdade de Economia da Universidade do Porto. Em setembro desse ano, ingressou no Mestrado em Economia na mesma instituição, tendo concluído a parte curricular desse ciclo de estudos com média de 18 em 20 valores.

Entre setembro de 2015 e julho de 2016, foi estagiário no Observatório de Economia e Gestão de Fraude (OBEGEF), sob a tutela do Professor Doutor Carlos Pimenta.

---

## Agradecimentos

Ao meu orientador, o Professor Doutor Pedro Mazeda Gil, não só pela disponibilidade, atenção e acompanhamento constantes, mas sobretudo pelo entusiasmo, empenho e dedicação contagiante no estudo da ciência económica. Foi uma honra poder contar com os seus conhecimentos e o seu contributo para este trabalho.

A todos os meus amigos em geral, que me incentivaram sempre durante estes anos, mas em particular ao André, pelo apoio, ajuda e conselhos ao longo de todas as fases do meu percurso académico, e ao Miguel, cujo companheirismo foi determinante nesta longa “caminhada”.

À minha namorada, Inês, por ter paciência para mim nos meus piores momentos e, acima de tudo, por tornar a minha vida mais preenchida.

À minha família, que não é pequena, e em especial à minha irmã e ao meu irmão. O seu apoio foi e continuará a ser fundamental.

Por último, à minha mãe, a quem dedico este trabalho, pelo apoio incondicional durante estes anos e por ter sido a pessoa que mais me incentivou a voltar à faculdade e a concluir os estudos.

---

## Resumo

O presente trabalho tem como objetivo analisar os efeitos da política monetária sobre o crescimento económico de longo prazo. Com essa finalidade, é construído um modelo de equilíbrio geral, introduzindo procura de moeda no modelo Gil et al. (2017). Trata-se de um modelo de crescimento endógeno com inovação vertical e horizontal e acumulação de capital físico, sob uma especificação *lab-equipment* das atividades de I&D, ao qual se acrescenta esfera monetária, modelizada através de uma restrição CIA. Esta configuração permite investigar o efeito da política monetária sobre o crescimento, num quadro teórico em que as atividades de I&D e a acumulação de capital físico são complementares no processo de desenvolvimento económico. De forma a simplificar a análise, apenas um dos blocos de I&D é considerado em cada versão do modelo a estudar. O desenvolvimento do modelo sem esfera monetária mostra que, num *setup* com acumulação de capital, a escolha entre inovação vertical ou horizontal não é inócua, uma vez que a primeira gera dinâmica de transição e a última não. Por outro lado, quando se introduz a restrição CIA (primeiro, no consumo e I&D e, posteriormente, estendida à produção), concluímos que um aumento da taxa de juro nominal tem um impacto negativo sobre a taxa de crescimento económico e que a regra de Friedman é ótima. Por último, construímos uma versão do modelo com I&D vertical e restrição CIA no consumo e I&D, que possibilita o estudo dos efeitos da política monetária sobre a dinâmica de transição. Assim, nesta variante, um aumento da taxa de juro nominal provoca, no curto prazo, uma descida da taxa de crescimento, sendo esse movimento reforçado durante a dinâmica de transição, conduzindo a taxas de crescimento permanentemente mais reduzidas no equilíbrio de longo prazo.

**Códigos JEL:** E41, O30, O40

**Palavras-chave:** política monetária, crescimento endógeno, I&D, acumulação de capital físico, restrição CIA.

---

## Abstract

This paper aims to explore the effects of monetary policy on long-run economic growth. To this purpose, we develop a general equilibrium model, introducing money demand in the model Gil et al. (2017). This model of endogenous growth features two types of innovations (vertical and horizontal) and physical capital accumulation, under a lab-equipment specification of R&D activities, to which we add money demand, modeled through a CIA constraint. This configuration allows us to analyse the effect of monetary policy on growth, within a theoretical framework in which R&D activities and physical capital accumulation are complementary in the process of economic development. For sake of simplicity, we focus on only one of the R&D blocks in each version of the model to be studied. The development of the model without money demand shows that in a setup with capital accumulation, the choice between vertical or horizontal innovation is not innocuous, since the former generates transition dynamics, while the latter does not. On the other hand, when the CIA constraint (first on consumption and R&D and then extended to manufacturing) is introduced, we find that a higher nominal interest rate reduces the growth rate of output and that the Friedman rule is optimal. Finally, we develop a version of the model with vertical innovation and CIA constraint on consumption and R&D, which enables us to explore the transitional effects of monetary policy. We find that an increase in the nominal interest rate reduces the growth rate in the short-run and on the transition path, leading to permanently lower growth rates in the long-run equilibrium.

**JEL codes:** E41, O30, O40

**Keywords:** monetary policy, endogenous growth, R&D, physical capital accumulation, CIA constraint.

---

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revisão da Literatura</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Modelo de crescimento endógeno com I&amp;D horizontal e acumulação de capital físico</b>	<b>11</b>
3.1	Famílias . . . . .	11
3.2	Decisão de produção e preços . . . . .	12
3.3	I&D . . . . .	13
3.4	Agregação Macroeconómica . . . . .	14
3.5	Equilíbrio Geral Dinâmico . . . . .	15
3.6	Efeitos de escala . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Modelo com restrição CIA no consumo e nas atividades de I&amp;D</b>	<b>22</b>
4.1	Famílias . . . . .	22
4.2	I&D . . . . .	24
4.3	Autoridade Monetária . . . . .	25
4.4	Agregação Macroeconómica . . . . .	26
4.5	Equilíbrio Geral Dinâmico . . . . .	27
4.6	Regra de Friedman e Bem-Estar Social . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Modelo com restrição CIA no consumo, atividades de I&amp;D e bens de capital</b>	<b>32</b>
5.1	Decisão de produção e preços . . . . .	32
5.2	Agregação Macroeconómica . . . . .	34
5.3	Equilíbrio Geral Dinâmico e Bem-Estar Social . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Modelo de crescimento endógeno com I&amp;D vertical, acumulação de capital físico e restrição CIA no consumo e atividades de I&amp;D</b>	<b>40</b>
6.1	Decisão de produção e preços . . . . .	40
6.2	I&D e Comportamento do Índice de Qualidade Agregado . . . . .	42
6.3	Agregação Macroeconómica e Taxas de Acumulação de Capital Físico e de Inovação de Equilíbrio . . . . .	45
6.4	Equilíbrio Geral Dinâmico . . . . .	46
6.4.1	Balanced Growth Path . . . . .	46
6.4.2	Dinâmica de Transição . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>54</b>

---

<b>Referências</b>	<b>58</b>
<b>Anexo</b>	<b>62</b>

---

## Lista de Figuras

6.1	Representação gráfica do steady-state interior de $k$ . . . . .	48
6.2	Representação gráfica do diagrama de fase no plano $(k, c)$ : choque sobre a taxa de juro nominal . . . . .	51
6.3	Representação gráfica da dinâmica de transição das variáveis endógenas relevantes: choque sobre a taxa de juro nominal . . . . .	52



---

## Lista de Tabelas

5.1	Análise Quantitativa: Elasticidade da taxa de crescimento de BGP face à taxa de juro nominal . . . . .	39
6.1	Análise Quantitativa: efeitos de um aumento da taxa de juro nominal sobre as variáveis endógenas no BGP. . . . .	50

# 1 Introdução

O desenvolvimento da teoria macroeconómica promoveu a sua divisão em dois campos distintos: a análise de curto prazo (ciclos económicos) e de longo prazo (crescimento económico). No campo monetário, esta distinção traduz-se normalmente numa ideia bem enraizada na disciplina, materializada na proposição da neutralidade da moeda, segundo a qual variações exógenas permanentes no nível da oferta de moeda não têm qualquer efeito sobre o nível de variáveis reais no longo prazo (Fisher e Seater, 1993). Por outro lado, a proposição da superneutralidade da moeda postula que variações exógenas permanentes na taxa de crescimento da oferta de moeda não provocam alterações no nível de variáveis reais no longo prazo (Fisher e Seater, 1993). Contudo, estudos empíricos (por ex., Fisher e Seater, 1993; Westerlund e Costantini, 2009) mostram que estes princípios não são consensuais. Esta não é uma questão negligenciável, na medida em que a não verificação destes princípios implica, no âmbito da política de estabilização macroeconómica, considerar benefícios e perdas que vão para além do curto prazo. Assim, revela-se essencial, numa perspetiva teórica, investigar quais as fontes responsáveis pela violação destas proposições (se for esse o caso), contribuindo para a formulação de hipóteses que possam ser testadas empiricamente. Os resultados que obtemos no decurso desta investigação devem ser interpretados à luz do conceito de superneutralidade da moeda, uma vez que, no âmbito do modelo aqui desenvolvido, é a taxa de crescimento da oferta de moeda que afeta a economia real.

Tais apreciações servem de motivação para o desenvolvimento deste trabalho, que procura analisar os efeitos da política monetária sobre o crescimento económico de longo prazo. Desta forma, pretendemos, através da nossa construção teórica, compreender as bases do possível elo de ligação entre as decisões relativas à condução da política por parte da autoridade monetária, usualmente destinadas à estabilização macroeconómica de curto prazo, e o crescimento económico. A existência de um mecanismo de propagação deste género pode oferecer alguma perspetiva no que toca às diferenças entre países em termos de crescimento económico, na medida em que as ações dos bancos centrais, na condução da política de curto prazo, concorrem, em termos médios, para regimes de taxas de inflação mais ou menos elevadas no longo prazo. Em última análise, o crescimento do produto per capita é o grande motor do processo de desenvolvimento dos países, tornando-se fundamental investigar que fenómenos são passíveis de o influenciar.

No que concerne ao presente estudo, interessa-nos investigar os efeitos da política monetária no âmbito dos modelos de crescimento endógeno, em que o motor do desenvolvimento é um resultado do próprio modelo. Mais especificamente, este trabalho identifica-se com a literatura do crescimento endógeno baseado em atividades de Investi-

gação e Desenvolvimento (I&D) com esfera monetária. O tema assume especial importância se as despesas em atividades de I&D (que são, na ótica destes modelos, a base do crescimento de longo prazo) por parte das empresas forem particularmente sensíveis a restrições de liquidez, algo que parece verificar-se empiricamente. Brown e Petersen (2009), por exemplo, mostram, num estudo que se foca em empresas industriais nos EUA, que, no período compreendido entre 1970 e 2006, a sensibilidade do investimento ao *cash-flow* quase que desaparece no investimento físico, enquanto se mantém relativamente elevado nas atividades de I&D.

Feitas estas considerações, o nosso objetivo passa por introduzir esfera monetária no modelo Gil et al. (2017), assim como uma autoridade monetária com capacidade para a influenciar, analisando de que forma a condução da política monetária, que se manifesta em variações da taxa de juro nominal, influencia o crescimento de equilíbrio de longo prazo. Na tradição de uma subliteratura do crescimento endógeno (Howitt e Aghion, 1998; Howitt, 1999; Howitt, 2000; Zeng, 2003; Sedgley e Elmslie, 2013), o modelo em Gil et al. (2017) admite uma especificação *lab-equipment* nas atividades de I&D, considerando dois tipos de inovação, vertical (traduzida pela melhoria de qualidade dos bens intermédios) e horizontal (que se manifesta na expansão do número de variedades de bens intermédios), e acumulação de capital físico. Esta configuração teórica não é de todo casual, tendo como propósito articular, no processo sustentado de crescimento, a acumulação de capital físico com o progresso tecnológico endógeno, permitindo também a admissão de pressupostos mais realistas, na medida em que o capital é parte integrante da tecnologia do setor de I&D (Howitt e Aghion, 1998). O principal contributo do nosso trabalho consiste na investigação da relação entre moeda e crescimento, num *setup* teórico com acumulação de capital físico e especificação *lab-equipment*, que permite ir ao encontro das questões levantadas por Howitt e Aghion (1998). Como se verá mais à frente (Capítulos 4, 5 e 6), a consideração destas características confere especificidades ao nosso modelo que nos distingue da restante literatura, com as respetivas consequências, em termos qualitativos e quantitativos, sobre os resultados obtidos.

Até ao limite do nosso conhecimento, no que diz respeito à análise dos efeitos da política monetária em modelos de crescimento endógeno baseados em atividades de I&D, este é o primeiro estudo a considerar esta configuração teórica, ou seja, em que o progresso tecnológico endógeno e a acumulação de capital físico são complementares no processo de crescimento.<sup>1</sup> Este projeto pode ser definido pela seguinte questão de investigação: qual a relação entre taxa de juro nominal e a taxa de crescimento económico de longo prazo, no âmbito de um modelo de crescimento endógeno (extensão do modelo Gil et al.,

<sup>1</sup>Chu et al. (2012) também consideram um modelo com acumulação de capital físico. Contudo, o seu modelo adota uma especificação *knowledge-driven* nas atividades de I&D e não é analisada a dinâmica de transição.

2017)? Com essa finalidade, pretende-se alcançar um conjunto de objetivos intermédios. Primeiro, com o argumento de simplicidade, reformulamos, eliminando o bloco de I&D vertical, e resolvemos o modelo, analisando a unicidade, hiperbolicidade e estabilidade do equilíbrio. Este passo permite-nos dar um contributo para a literatura do crescimento endógeno sem esfera monetária. Numa segunda fase, é introduzida procura de moeda no modelo através de uma restrição CIA que incide, num primeiro momento, sobre o consumo e as atividades de I&D, sendo posteriormente estendida ao setor da produção. São analisadas, novamente, as propriedades do equilíbrio. Por último, para tornar mais rica a nossa análise, desenvolvemos uma versão do modelo com I&D vertical e restrição CIA no consumo e nas atividades de I&D que, como será evidente nos capítulos seguintes, exhibe importantes diferenças relativamente ao modelo de inovação horizontal. Em todas estas etapas, incluímos análises numéricas que permitem complementar o estudo analítico do modelo nas suas diversas versões.

A dissertação tem a seguinte estrutura: no Capítulo 2, revisitamos a literatura referente aos efeitos da política monetária sobre o crescimento, abordando as principais discussões teóricas sobre o tema e o contexto em que surgiram; no Capítulo 3, reformulamos o modelo Gil et al. (2017), eliminando o bloco de I&D vertical; no Capítulo 4 figura o modelo de base (reformulado no Capítulo 3) com restrição CIA no consumo e atividades de I&D. No Capítulo 5, a restrição de liquidez passa a incidir também sobre o setor da produção. Uma versão do modelo com I&D vertical e restrição CIA no consumo e nas atividades de I&D é apresentada no Capítulo 6. As conclusões do presente trabalho são expostas no Capítulo 7.

## 2 Revisão da Literatura

Os primeiros modelos de crescimento endógeno procuraram ultrapassar limitações evidenciadas nos modelos de Solow (1956) e Ramsey (1928). Uma vez que o crescimento de *steady-state* é determinado exogenamente, sendo igual à taxa de progresso tecnológico, estes modelos são inadequados para compreender as fontes do crescimento de longo prazo (Barro e Sala-i-Martin, 2004). Uma forma de ultrapassar este problema foi admitir uma versão mais lata do conceito de capital ou considerar efeitos de *spillover* na acumulação de capital, de forma a que não esteja sujeito a rendimentos decrescentes na função produção agregada, podendo o modelo gerar assim crescimento endógeno mesmo sem progresso tecnológico (por ex., Romer, 1986). De maneira diferente, outras construções teóricas procuraram endogeneizar o progresso tecnológico, tentando explicar no próprio modelo as fontes deste processo. Neste contexto, o progresso tecnológico surge de um esforço por parte das empresas que, pretendendo obter rendas monopolistas, investem em atividades de I&D (Barro e Sala-i-Martin, 2004). Estes modelos caracterizam-se por admitirem dois tipos de inovação: inovação horizontal ou inovação vertical. No primeiro caso, o progresso tecnológico traduz-se numa expansão do número de variedades de bens intermédios (por ex., Romer, 1990),<sup>2</sup> enquanto no segundo manifesta-se através da melhoria da qualidade de produtos existentes (por ex., Aghion e Howitt, 1992). Note-se que os dois tipos de inovação não são mutuamente exclusivos. Outra característica que distingue os modelos é o tipo de *inputs* utilizado pelo setor de I&D. Assim, a especificação do I&D pode ser *knowledge-driven*, se usa como *input* capital humano (são exemplos deste tipo de modelos Romer, 1990; Aghion and Howitt, 1992; Jones, 1995b; Arnold e Kornprobst, 2008; Sequeira, 2011; e Growiec e Schumacher, 2013), ou *lab-equipment*, se admitir que o *input* é o bem final homogéneo (Howitt e Aghion, 1998; Howitt, 1999, 2000; Zeng, 2003; Barro e Sala-i-Martin, 2004, cap. 6 e 7; Sedgley e Elmslie, 2013; e Gil et al., 2017, são exemplos desta variante dos modelos de I&D). Segundo Gil et al. (2017), a especificação *lab-equipment* permite uma relação mais próxima entre acumulação de capital físico e atividades de I&D do que no caso *knowledge-driven*. No entanto, é de notar que nem todos os modelos de crescimento endógeno consideram a acumulação de capital físico. A introdução de capital nos modelos de crescimento baseados em atividades de I&D permite a incorporação de pressupostos mais realistas já que, de acordo com Aghion e Howitt (1998, p. 93), as “inovações tecnológicas são tipicamente incorporadas num bem durável, seja capital físico ou capital humano”.<sup>3</sup> DeLong e Summers (1991), por exemplo, apresentam evidência empírica que sugere que o investimento físico (equipa-

<sup>2</sup>De acordo com Barro e Sala-i-Martin (2004, cap 6), o número de variedades de bens intermédios é uma *proxy* da complexidade tecnológica ou do nível de especialização do processo produtivo das empresas.

<sup>3</sup>Tradução do autor do presente trabalho.

mentos e maquinaria) é um fator importante no crescimento económico dos países. Estas considerações são importantes já que, ao definir a configuração dos modelos, procuram basear os alicerces destas construções teóricas, e a sua estrutura, em resultados de estudos empíricos, contribuindo de forma determinante para qualquer extrapolação dos resultados que se pretenda realizar. A escolha do *setup* teórico em que se enquadra o nosso modelo visa exatamente abordar estas questões, que não são de todo negligenciáveis.

Não obstante as especificidades dos modelos serem importantes, a literatura do crescimento endógeno, tomada no seu conjunto, representa um ponto de rutura na teoria macroeconómica, já que fornece um quadro analítico que permite pôr em causa a tradicional divisão da disciplina entre ciclo e tendência, desafiando também princípios geralmente aceites na teoria dos ciclos económicos, segundo os quais choques da procura não têm efeitos permanentes sobre a tecnologia e o crescimento (Aghion e Howitt, 1998, cap. 8). Neste sentido, quando se considera tecnologia endógena, até a proposição da neutralidade da moeda pode ser rejeitada (Aghion e Howitt, 1998, cap. 8). Estes são os resultados da investigação seminal de Stadler (1990), que compara modelos de ciclos económicos (reais e monetários), com e sem tecnologia endógena. O autor conclui que os modelos reais e monetários têm propriedades semelhantes quando o crescimento é endógeno e choques da procura podem ter um efeito permanente sobre o produto. Este estudo faz parte de uma subliteratura que tenta fazer a “ponte” entre o ciclo e a tendência, analisando as consequências de choques de curto prazo e da política de estabilização macroeconómica na evolução do produto no longo prazo (ver, por exemplo, Pelloni, 1997; Blackburn, 1999; Blackburn e Pelloni, 2005). A ideia base destes estudos assenta no facto de a economia ser caracterizada por uma tecnologia *learning-by-doing*, ou seja, existe um efeito positivo da experiência na produtividade dos fatores (Barro e Sala-i-Martin, 2004). Assim sendo, variações da procura afetam o emprego e a utilização dos fatores produtivos no curto prazo que, dadas as especificidades tecnológicas admitidas, têm um efeito permanente sobre o produto. Consequentemente, quando a tecnologia é endógena, choques monetários têm efeitos permanentes sobre o produto de longo prazo, deixando de ser válido o princípio da neutralidade da moeda (Stadler, 1990).

De forma análoga, uma relação semelhante pode ser encontrada no mecanismo de propagação de choques de curto prazo ao produto de longo prazo, quando consideramos modelos de crescimento endógeno baseados em atividades de I&D. No âmbito destes modelos, sendo o progresso tecnológico o motor do crescimento económico, é pertinente levantar a questão sobre a ligação entre choques de curto prazo e o crescimento de longo prazo, se admitirmos que essas perturbações têm impacto sobre as atividades desenvolvidas no setor de I&D (por ex., Chu et al., 2012; Chu e Lai, 2013; Chu e Cozzi, 2014). As questões sobre os efeitos da moeda ou inflação sobre o crescimento não são propriamente

recentes. Estudos seminais de Tobin (1965) e Sidrauski (1967) deram os primeiros contributos para a análise da relação entre moeda e acumulação de capital físico. Em Tobin (1965), a existência de um ativo monetário na economia, alternativo ao capital, faz com que um aumento da taxa de crescimento monetário tenha um efeito positivo sobre o *stock* de capital de longo prazo. Por outro lado, Sidrauski (1967) introduz a moeda na função utilidade, sendo que variações na taxa de crescimento monetário reduzem a taxa de acumulação de capital no curto prazo, mas não afetam o *stock* de capital no longo prazo.

Estes trabalhos evidenciam não só a relação entre moeda e capital no longo prazo, mas também formas diferentes de introduzir a procura de moeda nos modelos. Esta é uma questão importante visto que, segundo Wang e Yip (1992), a maneira de introduzir a procura de moeda tem influência sobre os resultados em termos de estática comparada. Estes autores analisam três abordagens diferentes na introdução da procura de moeda em modelos de crescimento. A abordagem *Money-in-the-Utility-Function* (MIUF) (Sidrauski, 1967; Brock, 1974), muito literalmente, introduz a moeda como um argumento da função utilidade. Alternativamente, uma restrição *Cash-in-Advance* (CIA) pode ser admitida, o que significa que os agentes precisam de deter moeda para adquirir certos bens (Stockman, 1981). Por último, na abordagem *transactions-costs* (TC) (Saving, 1971), a procura de moeda depende sobretudo da capacidade que o ativo monetário tem para reduzir custos de transação. Wang e Yip (1992) concluem que, para existir equivalência qualitativa em termos de estática comparada entre os três modelos, é necessário que os mesmos respeitem certas condições, que aqui enumeramos: complementaridade entre consumo e lazer, complementaridade entre consumo e moeda, substituíbilidade entre lazer e moeda e domínio fraco do efeito consumo sobre o efeito balanço. No presente estudo, seguimos a abordagem mais utilizada na literatura dos modelos monetários de crescimento baseados em I&D, introduzindo procura de moeda através de uma restrição CIA.<sup>4</sup>

A modelização da procura de moeda é uma parte importante dos modelos monetários de crescimento. No entanto, se o crescimento de longo prazo do produto per capita for determinado exogenamente, como acontece nos modelos de Solow (1956) e de Ramsey (1928), o estudo do efeito da política monetária sobre o mesmo não tem interesse. A subliteratura que se relaciona com este trabalho não é particularmente extensa, não obstante os resultados serem bastante interessantes. Até ao limite do nosso conhecimento, o primeiro modelo teórico a abordar os efeitos da política monetária sobre o crescimento económico de longo prazo (em modelos de crescimento endógeno baseados em atividades de I&D) foi desenvolvido por Marquis e Reffett (1994). Os autores consideram um *setup* teórico

<sup>4</sup>Note-se que a introdução da restrição de liquidez não tem recebido um tratamento homogéneo na literatura. A escolha dos setores sobre os quais a mesma incide é um elemento importante dos modelos monetários de crescimento, e assume especial relevância neste trabalho, como será notório nos Capítulos 4 e 5.

semelhante a Romer (1990), admitindo um setor adicional na economia, responsável pela prestação de serviços de transação, que utiliza capital humano como *input*, e uma restrição CIA no consumo. Neste modelo, os bens de consumo são caracterizados segundo o meio de pagamento utilizado para os adquirir. Os *cash goods* estão sujeitos a uma restrição CIA, enquanto os *non-cash goods* dependem de uma restrição de capacidade do setor de serviços de transação. Desta forma, um aumento da inflação reflete-se num custo adicional na compra de bens baseada em transações monetárias, levando os agentes económicos a preferirem o consumo de *non-cash goods* em detrimento dos *cash goods*. Assim, o setor de serviços de transação passa a ter mais relevância enquanto meio de pagamento da economia, promovendo uma realocação de capital humano do setor de I&D e da produção de bens finais para o setor responsável pelo processamento das transações. Em última instância, este efeito tem um impacto negativo sobre a taxa de crescimento do capital, de novo conhecimento e do produto. Um exemplo numérico é utilizado para confirmar a proposição dos autores. Marquis e Reffett (1994) concluem que a realocação de recursos para o sistema de pagamentos, e o consequente alargamento do setor financeiro, é realizada à custa de atividades que promovem o crescimento.

Mais recentemente, Chu et al. (2012) consideram um modelo semelhante a Marquis e Reffett (1994), mas apenas admitindo uma restrição CIA no consumo, em que a acumulação de capital e o I&D são ambos motores do crescimento de longo prazo (o próprio investimento em capital traz benefícios em termos de produtividade, ou seja, é em tudo semelhante ao conceito de *learning-by-doing*). Estes autores admitem uma especificação *knowledge-driven* das atividades de I&D. A oferta de trabalho é elástica e o modelo permite ainda uma interação entre o poder de mercado das empresas e o crescimento económico, através da introdução de uma variável que podemos entender como grau de proteção de patentes. Tal como em Marquis e Reffett (1994), um aumento da inflação tem um efeito negativo sobre a taxa de crescimento económico de longo prazo. No entanto, em Chu et al. (2012), este resultado não é fruto de uma realocação do capital humano entre os setores da economia, mas sim devido à redução da oferta de trabalho (motivado pelo aumento da inflação), que é um *input* do setor de I&D e da acumulação de capital. Adicionalmente, os autores concluem que o grau de proteção de patentes influencia os efeitos da política monetária sobre o crescimento, sendo, todavia, o seu efeito ambíguo. Com efeito, um maior poder de mercado das empresas exacerba os efeitos da política monetária sobre o crescimento através do canal I&D, mas reduz esses efeitos através do canal de acumulação de capital (Chu et al., 2012). Calibrando o modelo com dados dos Estados Unidos e da Zona Euro, Chu et al. (2012) demonstram que um aumento da *markup* amplia os efeitos da inflação sobre o crescimento económico em ambas as áreas, inferindo dessa forma que existe um domínio do canal I&D sobre o canal de acumulação de capital.



Por outro lado, Chu e Lai (2013) analisam os efeitos da inflação sobre o crescimento económico num modelo de crescimento endógeno baseado em atividades de I&D, com inovação vertical (semelhante à configuração do modelo de Aghion e Howitt, 1992), sob uma especificação *knowledge-driven*, oferta de trabalho elástica e introduzindo a procura de moeda através da abordagem MIUF. Se a elasticidade de substituição entre consumo e disponibilidades reais de moeda for menor que um (ou seja, se forem complementares), do modelo resulta uma relação negativa entre inflação e taxa de crescimento do produto. Ao contrário de Marquis e Reffett (1994) e Chu et al. (2012), o modelo de Chu e Lai (2013) não admite acumulação de capital físico. Não obstante, o efeito da inflação sobre o crescimento económico é equivalente ao dos modelos apresentados anteriormente, em que o tipo de inovação era horizontal. Chu e Lai (2013) complementam a sua análise teórica com um exemplo numérico, do qual resulta um impacto negativo da inflação no bem-estar social, e com um estudo empírico, que conclui pela existência de uma relação negativa entre inflação e atividades de I&D.

Chu e Cozzi (2014) constroem um modelo com inovação vertical semelhante a Chu e Lai (2013), admitindo oferta de trabalho elástica e sem acumulação de capital, mas modelizando a procura de moeda através de uma restrição CIA. O estudo analisa os efeitos de um aumento da taxa de juro nominal sobre as atividades de I&D e o crescimento, considerando dois casos distintos. No primeiro cenário, em que restrição CIA incide sobre o consumo e o investimento em I&D, um aumento da taxa de juro nominal reduz as atividades de I&D e o crescimento. O resultado é em tudo semelhante ao de Chu e Lai (2013), uma vez que no modelo de Chu e Cozzi (2014), variações da taxa de juro nominal refletem variações da inflação (no sentido em que as autoridades ajustam a orientação de política monetária de modo a acomodar uma determinada alteração no nível de taxa de inflação objetivo para o longo prazo). No caso alternativo figura uma restrição CIA sobre o consumo, a produção e o investimento em I&D, sendo, todavia, assumido que a oferta de trabalho é inelástica. Segundo esta especificação, um aumento da taxa de juro nominal tem um efeito negativo sobre as atividades de I&D e o crescimento económico, na condição de a magnitude da restrição CIA ser superior no investimento em I&D (relativamente à restrição CIA na produção). Este resultado leva-nos a concluir que, quando consideramos uma especificação CIA para modelizar a procura de moeda, a relação entre inflação (taxa de juro nominal) e crescimento económico (e atividades de I&D) pode ser afetada pela escolha do(s) setor(es) sobre o qual a restrição CIA incide. Assim, no presente estudo, pretendemos também investigar se, num *setup* distinto do considerado por Chu e Cozzi (2014) (por admitir acumulação de capital físico e uma especificação *lab-equipment*), a incidência da restrição de liquidez em diferentes setores se manifesta nos resultados do modelo.

De facto, dois estudos recentes (Huang et al., 2013; Chu e Ji, 2016), utilizando modelizações teóricas muito semelhantes,<sup>5</sup> mas considerando restrições CIA em diferentes setores, chegam a conclusões distintas sobre os efeitos da política monetária sobre o crescimento económico. Ambos são modelos Schumpeterianos de crescimento com estrutura de mercado endógena, admitindo inovação vertical e horizontal, sem acumulação de capital físico. A inovação vertical é levada a cabo pelos incumbentes, no sentido de melhorar a qualidade dos seus produtos e reduzir o custo de produção. A inovação horizontal é realizada pelos potenciais entrantes, que criam novos produtos para competir com os incumbentes e assim ganhar quota de mercado. Por conseguinte, a inovação vertical determina o progresso tecnológico, enquanto a horizontal reflete-se na estrutura de mercado, afetando a dimensão de mercado das empresas (Chu e Ji, 2016). Contudo, os modelos diferem na forma de introduzir a procura de moeda. Apesar de assumirem ambos uma especificação CIA, Huang et al. (2013) introduz a restrição no consumo e no investimento em I&D vertical e horizontal, enquanto em Chu e Ji (2016), essa restrição incide apenas sobre o consumo. Huang et al. (2013) concluem que, com uma restrição CIA no investimento em I&D realizado pelos incumbentes (inovação vertical), um aumento da taxa de juro nominal (que reflete um aumento da inflação) reduz a dimensão de mercado das empresas e a taxa de crescimento da produtividade total dos fatores (PTF) no *steady-state / Balanced Growth Path*. Por outro lado, quando a restrição CIA é introduzida no investimento em I&D efetuado pelos potenciais entrantes (inovação horizontal), um aumento da taxa de juro nominal provoca, no equilíbrio de longo prazo, um aumento da dimensão de mercado das empresas e da taxa de crescimento da PTF. De acordo com este estudo, um aumento da inflação pode estar positivamente relacionado com um maior crescimento já que, empiricamente, as restrições de liquidez parecem ser mais fortes para o investimento em I&D levado a cabo por potenciais entrantes. De forma diferente, no modelo de Chu e Ji (2016), em que a restrição CIA incide apenas sobre o consumo, um aumento da taxa de juro nominal reduz, no *steady-state / Balanced Growth Path*, o número de empresas, mas não tem qualquer efeito sobre a taxa de crescimento económico e a dimensão de mercado das empresas. Uma particularidade relevante destes estudos é que são os únicos, entre os modelos monetários de crescimento baseados em I&D elencados neste capítulo, a analisar o efeito da política monetária na dinâmica de transição, ainda que com resultados diferentes.<sup>6</sup> Neste aspeto, o nosso estudo identifica-se com aqueles, já que, na versão com

<sup>5</sup>Huang et al. (2013) admitem uma especificação *knowledge-driven*, enquanto Chu e Ji (2016) consideram uma especificação *lab-equipment*.

<sup>6</sup>Em Chu e Ji (2016), um aumento da taxa de juro nominal provoca uma descida da taxa de crescimento no curto prazo, sucedida por uma recuperação na dinâmica de transição, que a transporta para o nível anterior ao choque. Já em Huang et al. (2013), se a restrição CIA incidir sobre o investimento de entrada (sobre o I&D realizado pelos incumbentes), um aumento da taxa de juro eleva (reduz) a taxa de crescimento no curto prazo, sendo esse movimento reforçado durante a dinâmica de transição, conduzindo a taxas de

I&D vertical, é analisado o efeito da política monetária sobre o crescimento (e restantes variáveis endógenas) durante a dinâmica de transição. Todavia, é importante realçar uma vez mais que, ao contrário de Huang et al. (2013) e Chu e Ji (2016), o nosso modelo admite acumulação de capital físico.

Torna-se evidente que, dadas as especificidades das modelizações teóricas adotadas, os resultados para a relação entre taxa de juro nominal (inflação) e taxa de crescimento económico de longo prazo não são consensuais. Neste sentido, pretendemos contribuir para esta literatura, admitindo um *setup* que tenta incorporar pressupostos mais realistas, e em que o capital físico é uma componente imprescindível do processo de crescimento, analisando não só os efeitos da política monetária sobre o equilíbrio de longo prazo, como também o seu impacto sobre as variáveis na dinâmica de transição.

---

crescimento permanentemente mais elevadas (baixas) no BGP.

### 3 Modelo de crescimento endógeno com I&D horizontal e acumulação de capital físico

A exposição que se segue baseia-se em Gil et al. (2017), adaptada ao contexto de um modelo de I&D horizontal, em vez de I&D vertical e horizontal. A eliminação do bloco de I&D vertical, presente no modelo original, justifica-se com o argumento de simplicidade, visto que o objetivo deste trabalho passa por analisar os efeitos da política monetária sobre o crescimento económico introduzindo, posteriormente, para esse efeito, procura de moeda no modelo. Admite-se uma especificação *lab-equipment* do I&D, que significa que o *input* utilizado neste setor é o bem final.

#### 3.1 Famílias

As famílias, que consomem, existem em número constante e têm um horizonte de vida infinito, obtendo rendimento do trabalho e do investimento em ativos financeiros e oferecendo inelasticamente trabalho,  $L$ , às empresas de bem final. Sendo perfeitamente racionais, escolhem o trajeto do consumo que lhes permite maximizar a utilidade intertemporal

$$U = \int_0^{\infty} \left( \frac{C(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) \cdot e^{-\rho t} dt, \quad (3.1)$$

onde  $\rho > 0$  é a taxa de desconto subjetiva e  $\theta > 0$  é o inverso da elasticidade intertemporal de substituição no consumo, sujeita à restrição orçamental em fluxos

$$\dot{a}(t) = r(t) \cdot a(t) + w(t) \cdot L - C(t), \quad (3.2)$$

em que  $a(t)$  denota os ativos financeiros reais das famílias,  $r(t)$  a taxa real de retorno sobre os ativos financeiros e  $w(t)$  o salário real. O nível inicial de riqueza  $a(0)$  é dado e a condição de “non-Ponzi games” é  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\int_0^t r(s) ds} a(t) \geq 0$ . A equação de Euler, que descreve a trajetória ótima do consumo, e a condição de transversalidade são, respetivamente:

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta} \cdot (r(t) - \rho) \quad (3.3)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} \cdot C(t)^{-\theta} \cdot a(t) = 0. \quad (3.4)$$

### 3.2 Decisão de produção e preços

A empresa que produz o bem final utiliza uma tecnologia com rendimentos constantes à escala, usando trabalho e um contínuo de bens intermédios com medida  $N(t)$ , variando ao longo do tempo,  $t$

$$Y(t) = A \cdot L^{1-\alpha} \int_0^{N(t)} X(\omega, t)^\alpha d\omega, 0 < \alpha < 1, \quad (3.5)$$

onde  $A > 0$  é a componente exógena da produtividade total dos fatores,  $L$  é o fator trabalho (que, por simplificação, se assumirá como estando constante no tempo),  $1 - \alpha$  é a proporção do trabalho na produção e  $X(\omega, t)$  é o input do bem intermédio  $\omega$  no momento  $t$ .

Os produtores de bens finais são *price-takers*, admitindo como dados os salários  $w(t)$  e o preço dos inputs  $p(\omega, t)$ , vendendo o seu produto a um preço também tomado como dado. Todos os preços e salários estão normalizados pelo preço do bem final (tratam-se, assim, de preços e salários reais). Das condições de maximização do lucro, a procura agregada do bem intermédio  $\omega$  é dada por

$$X(\omega, t) = L \cdot \left( \frac{A \cdot \alpha}{p(\omega, t)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \omega \in [0, N(t)]. \quad (3.6)$$

O bem intermédio é não durável e é produzido utilizando capital, de acordo com a função de produção

$$X(\omega, t) = K(\omega, t) \quad (3.7)$$

onde  $K(\omega, t)$  é o input do capital no setor  $\omega$ . O bem intermédio é produzido com uma função custo  $r(t) \cdot K(\omega, t) = r(t) \cdot X(\omega, t)$ , onde o custo do capital é a taxa de juro real de equilíbrio,  $r(t)$ .<sup>7</sup> O setor de bens intermédios consiste num contínuo  $N(t)$  de indústrias. Existe concorrência monopolística se considerarmos o setor como um todo: o monopolista na indústria  $\omega$  fixa o preço  $p(\omega, t)$ , mas enfrenta a curva da procura isoelástica (3.6). O lucro na indústria  $\omega$  é dado por  $\Pi(\omega, t) = (p(\omega, t) - r(t)) \cdot X(\omega, t)$ . O preço que maximiza o lucro é uma *markup* sobre o custo marginal

$$p(\omega, t) \equiv p(t) = \frac{r(t)}{\alpha} > 1, \quad (3.8)$$

que é constante entre indústrias, mas possivelmente variável ao longo do tempo. A partir de (3.6) e (3.8), a quantidade agregada produzida de  $\omega$  é

<sup>7</sup>Por simplicidade, não se considera depreciação física do capital.

$$X(\omega, t) = X(t) = L \cdot \left( \frac{A \cdot \alpha^2}{r(t)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (3.9)$$

Por outro lado, o equilíbrio no mercado de capital implica que

$$K(t) = \int_0^{N(t)} K(\omega, t) d\omega = \int_0^{N(t)} X(\omega, t) d\omega = N(t) \cdot X(t). \quad (3.10)$$

Assim, juntando (3.9) e (3.10), temos

$$r(t) = A \cdot \alpha^2 \cdot k(t)^{\alpha-1}, \quad (3.11)$$

onde  $k \equiv K/(NL)$ . Esta equação expressa a condição de que o custo do capital tem de igualar a sua produtividade marginal, ajustada pelo efeito da *markup*,  $1/\alpha$ . Usando (3.8) e (3.11), chegamos ao lucro ótimo do monopolista em  $\omega$

$$\Pi(\omega, t) = A \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot L \cdot k(t)^\alpha, \quad (3.12)$$

Substituindo (3.10) em (3.5), temos

$$Y(t) = A \cdot L \cdot N(t) \cdot k(t)^\alpha. \quad (3.13)$$

### 3.3 I&D

Apenas se considera um setor de I&D, que dedica a sua atenção à criação de novas variedades de bens intermédios. A inovação é levada a cabo por um potencial entrante, tal significando que, dada a condição de entrada livre, o novo bem é produzido por novas empresas. Sob concorrência perfeita entre empresas de I&D e rendimentos constantes à escala ao nível da empresa, a entrada instantânea é dada por  $\dot{N}_e(t) = \frac{1}{\eta} \cdot R_{ne}(t)$ , onde  $\dot{N}_e(t)$  é a contribuição para o fluxo instantâneo de novos produtos por parte da empresa de I&D  $e$  a um custo de  $\eta$  unidades de bem final.  $R_{ne}(t)$  é o fluxo de recursos dedicados ao I&D horizontal pelo inovador  $e$  no momento  $t$ . Assume-se que o custo  $\eta$  é simétrico e constante entre empresas. Assim, ao nível agregado, temos  $R_n = \sum_e R_{ne}$  e  $\dot{N}(t) = \sum_e \dot{N}_e(t)$ , implicando que

$$R_n(t) = \eta \cdot \dot{N}(t). \quad (3.14)$$

Tendo em conta a eq. (3.12), o valor presente do inovador é dado por

$$V(t) = A \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot L \int_t^\infty k(t)^\alpha \cdot e^{-\int_t^s r(v) dv} ds. \quad (3.15)$$

A condição de entrada livre é  $\dot{N} \cdot V(t) = R_n$  (i.e., o benefício com a entrada no mercado iguala o respetivo custo), que, considerando (3.14), simplifica para

$$V(t) = \eta \quad (3.16)$$

Substituindo (3.15) em (3.16) e diferenciando em relação ao tempo a expressão resultante, chegamos à condição de não-arbitragem que um inovador horizontal enfrenta

$$r(t) = \frac{\Pi(t)}{V(t)} + \frac{\dot{V}(t)}{V(t)}. \quad (3.17)$$

Esta equação mostra que a taxa de retorno do I&D é igual à taxa de lucro,  $\pi(t)/V(t)$ , mais a taxa de ganhos de capital,  $\dot{V}(t)/V(t)$ . Dado que  $\eta$  é constante,  $\dot{V}(t) = 0$  e, por conseguinte, a condição de não arbitragem é dada por

$$r(t) = \frac{\Pi(t)}{\eta} \quad (3.18)$$

### 3.4 Agregação Macroeconómica

A riqueza financeira agregada de todas as famílias é  $a(t) = K(t) + \int_0^{N(t)} V(\omega, t) d\omega$ , sendo equivalente, por (3.16), a

$$a(t) = K(t) + \eta \cdot N(t) \quad (3.19)$$

Assim, a variação da riqueza agregada ao longo do tempo será

$$\dot{a}(t) = \dot{K}(t) + \eta \cdot \dot{N}(t), \quad (3.20)$$

uma vez que  $\eta$  é constante. Utilizando (3.2), e dado que da maximização do lucro em relação ao trabalho resulta  $w = (1 - \alpha) \cdot (Y/L)$ , temos

$$(K + \eta \cdot N) \cdot r + (1 - \alpha) \cdot Y - C = \dot{K} + \eta \cdot \dot{N}.$$

Recordando (3.11), (3.12), (3.13) e (3.18) (de modo a ter  $r \cdot K = \alpha^2 \cdot Y$  e  $\eta \cdot N \cdot r = N \cdot \Pi = (1 - \alpha) \cdot \alpha \cdot Y$ ) e  $\eta \cdot \dot{N} = R_n$ , vem

$$Y(t) = \dot{K}(t) + C(t) + R_n(t), \quad (3.21)$$

que é a restrição orçamental agregada e a condição de equilíbrio no mercado de bem final.

### 3.5 Equilíbrio Geral Dinâmico

Sendo as famílias detentoras de todos os ativos da economia, a taxa de retorno do capital do ponto de vista do setor de bens finais e a taxa de retorno do ponto de vista do setor de I&D têm de ser iguais. Assim, e recordando uma vez mais (3.11) e (3.18), o capital de equilíbrio é completamente determinado pelos parâmetros do modelo, sendo igual a

$$k^* = \frac{\alpha \cdot \eta}{(1 - \alpha) \cdot L}. \quad (3.22)$$

Note-se que o custo do I&D,  $\eta$ , tem um efeito positivo sobre a intensidade capitalística da economia  $k^*$ , que resulta da arbitragem entre a taxa de retorno no setor de I&D e a taxa de remuneração do capital.<sup>8</sup>

Como  $k$  apenas depende dos parâmetros do modelo, aplicando logaritmos a (3.13) e diferenciando em relação ao tempo, temos que, para dado  $t$ ,

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{N}(t)}{N(t)}.$$

A expressão para  $\dot{N}(t)/N(t)$  pode ser obtida a partir da restrição orçamental agregada (3.21) e do montante agregado de I&D,  $R_n$ , pela eq. (3.14)

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \frac{1}{\eta \cdot N(t)} \cdot (A \cdot L \cdot N(t) \cdot k(t)^\alpha - \dot{K}(t) - C(t)) \quad (3.23)$$

Por outro lado, como  $k$  está constante por (3.22),  $r$  também é constante por (3.11), com  $r^* = \left(\frac{L}{\eta}\right)^{1-\alpha} \cdot A \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} \cdot \alpha^2$ . Assim, pela equação (3.9),  $X$  também é constante e, por (3.10),  $\dot{K}(t) = \dot{N}(t) \cdot X$ . Utilizando (3.22) e lembrando que  $X = L \cdot k$  por (3.10), a equação diferencial para  $N(t)$  vem

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \left(\frac{1-\alpha}{\eta}\right) \cdot \left[A \cdot L^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha \cdot \eta}{1-\alpha}\right)^\alpha - \frac{C(t)}{N(t)}\right], \quad (3.24)$$

O sistema dinâmico em  $(C, N)$  que descreve a economia é dado por (3.24) e pela equação de Euler, em (3.3), ou seja

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta} \cdot \left[\left(\frac{L}{\eta}\right)^{1-\alpha} \cdot A \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} \cdot \alpha^2 - \rho\right]. \quad (3.25)$$

Por outro lado, dado que, por (3.21) e (3.14),  $Y(t) = \dot{K}(t) + C(t) + \eta \cdot \dot{N}(t) \Leftrightarrow 1 =$

<sup>8</sup>Ou seja, um aumento de  $\eta$  implica uma diminuição da taxa de retorno do I&D que, por arbitragem, faz com que a taxa de remuneração do capital seja também menor. Tudo o resto constante, uma taxa de remuneração do capital mais reduzida reflete, na lógica dos rendimentos marginais decrescentes, uma intensidade capitalística mais elevada.



$\frac{\dot{K}(t)}{Y(t)} + \frac{C(t)}{Y(t)} + \eta \cdot \frac{\dot{N}(t)}{Y(t)}$ , no equilíbrio de longo prazo, para termos uma trajetória sustentada (*Balanced Growth Path*), é necessário que se verifique a seguinte condição para as taxas de crescimento das variáveis

$$g_Y^* = g_C^* = g_K^* = g_N^* = g^* = \frac{1}{\theta} \cdot (r^* - \rho), \quad (3.26)$$

onde o último termo vem da eq. (3.3), e que a taxa de juro real,  $r(t)$ , não exiba tendência, ou seja,  $g_r = 0$ . Definindo  $c(t) = C(t)/(L \cdot N(t))$ , com a propriedade de que, ao longo do *Balanced Growth Path*,  $\dot{c}(t) = 0$ , o sistema (3.24)-(3.25) é equivalente a

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \phi + \frac{(1-\alpha) \cdot L}{\eta} \cdot c(t), \quad (3.27)$$

em que

$$\phi = \frac{r^*}{\theta} - \frac{r^*}{\alpha} - \frac{\rho}{\theta}.$$

Seja  $f(c) = \dot{c} = \phi \cdot c + \frac{(1-\alpha) \cdot L}{\eta} \cdot c^2$ . A equação (3.27) tem dois pontos de equilíbrio, em  $c^* = 0$ , que não tem interesse económico, e em  $c^* = \frac{\phi \cdot \eta}{(\alpha-1) \cdot L}$ . Este ponto de equilíbrio (*steady state*) interior corresponde a uma trajetória de equilíbrio dinâmico (*Balanced Growth Path*) no sentido usual, como definido acima (ver eq. (3.26)), caracterizada por uma taxa de crescimento endógena positiva e constante. Para realizar o estudo qualitativo do ponto de equilíbrio interior, pelo Teorema da Estabilidade Local, basta fazer a derivada de  $f(c)$  e avaliar o seu sinal no ponto de equilíbrio, de forma a determinar a sua estabilidade.

$$f' \left( \frac{\phi \cdot \eta}{(\alpha-1) \cdot L} \right) = \phi + 2 \cdot \frac{(1-\alpha) \cdot L}{\eta} \cdot \left( \frac{\phi \cdot \eta}{(\alpha-1) \cdot L} \right) = -\phi$$

Então, para que o ponto de equilíbrio seja estável,  $\phi$  terá que ser positivo.

Por outro lado, para garantir que o integral em (3.1) é convergente, ou seja, para não termos um problema degenerado (isto é,  $U \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ ), é necessário que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} \left( \frac{C(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) = 0$$

Pela equação de Euler, a solução da equação diferencial em  $C$  vem dada por

$$C(t) = C(0) \cdot e^{\frac{1}{\theta} \cdot (r-\rho)t}.$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} \left( \frac{C(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) =$$

$$= \left( \frac{1}{1-\theta} \right) \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\rho t} \left( C(0)^{1-\theta} \cdot e^{\frac{1-\theta}{\theta} \cdot (r-\rho)t} - 1 \right)$$

Como  $C(0)$  é uma constante, para o integral em  $U$  ser convergente, terá que ser verificada a seguinte condição

$$\rho > \left( \frac{1-\theta}{\theta} \right) \cdot (r-\rho) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\rho}{\theta} > \left( \frac{1-\theta}{\theta} \right) \cdot r$$

Relembrando que, para o ponto de equilíbrio ser estável, é necessário que

$$\phi = \frac{r}{\theta} - \frac{r}{\alpha} - \frac{\rho}{\theta} > 0,$$

então, pela condição de convergência do integral em  $U$ ,

$$\frac{r}{\theta} - \frac{r}{\alpha} > \frac{\rho}{\theta} > \left( \frac{1-\theta}{\theta} \right) \cdot r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 > \frac{1}{\alpha},$$

o que nunca acontece, já que, por definição,  $0 < \alpha < 1$ . Desta forma, concluímos que o ponto de equilíbrio interior é hiperbólico e instável. Note-se que, com  $\phi < 0$ , se garante também que  $c^* > 0$ . Assim, relativamente à dinâmica, para evitar o crescimento explosivo (que viola as condições de otimalidade), os agentes terão que se colocar, para todo o  $t$ , sobre o *Balanced Growth Path*. Consequentemente, não existe dinâmica de transição neste modelo. Esta é uma conclusão interessante, uma vez que o modelo de Howitt e Aghion (1998), que utiliza um *setup* teórico que serviu de base a esta análise, mas com inovação vertical, gera dinâmica de transição.<sup>9</sup> A ausência de dinâmica de transição no modelo de I&D horizontal com acumulação de capital físico resulta da condição de igualdade entre a taxa de remuneração real do capital físico e a taxa de retorno real das atividades de I&D, que, por sua vez, estabelece  $k$  apenas como função dos parâmetros estruturais tecnológicos do modelo para qualquer  $t$ . No modelo de I&D vertical em Howitt e Aghion (1998), a taxa de retorno das atividades de I&D é aumentada pela taxa esperada de chegada de uma inovação, dado que cada inovação leva à exclusão do mercado do monopolista in-

<sup>9</sup>Se tomarmos como exemplo os modelos de I&D horizontal (Barro e Sala-i-Martin, 2004, cap. 6) e de I&D vertical (Barro e Sala-i-Martin, 2004, cap. 7), poderíamos ser levados a concluir que, face à semelhança de resultados, a escolha entre os dois tipos de inovação é meramente uma questão de preferência do autor do modelo. Contudo, se compararmos o modelo que apresentámos com o de Howitt e Aghion (1998), o nosso resultado mostra que, quando se admite um *setup* com capital físico, a escolha entre inovação vertical e horizontal não é inócua (na medida em que um gera dinâmica de transição e outro não).

cumbente (este é o designado "efeito de destruição criativa" típico dos processos de I&D vertical). Esta taxa é endógena, dependendo da quantidade de recursos (em unidades do bem final) afetos às atividades de I&D. Decorre daqui que, em cada  $t$ ,  $k$  será também função destes recursos, por sua vez condicionados pela dinâmica das restantes variáveis endógenas do modelo através da restrição orçamental agregada.

O nosso resultado é semelhante ao do modelo de inovação horizontal de Barro e Sala-i-Martin (2004, cap. 6), que admite uma especificação *lab-equipment* do I&D, mas não inclui capital. Comparando os dois modelos, se explicitarmos  $g^*$  à custa de  $r^*$ , temos

$$g_{BS}^* = \frac{1}{\theta} \cdot \left[ \frac{L}{\eta} \cdot A^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \cdot \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} - \rho \right] = \frac{1}{\theta} \cdot (r_{BS}^* - \rho)$$

$$g^* = \frac{1}{\theta} \cdot \left[ \left( \frac{L}{\eta} \right)^{1-\alpha} \cdot A \cdot \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} \cdot \alpha^2 - \rho \right] = \frac{1}{\theta} \cdot (r^* - \rho),$$

em que o subscrito *BS* denota as variáveis no modelo de Barro e Sala-i-Martin (2004, cap. 6). É fácil verificar que

$$g^* = \frac{1}{\theta} \cdot (r_{BS}^{*1-\alpha} - \rho).$$

Ou seja, a taxa de juro do modelo com capital ( $r^*$ ) é igual à taxa de juro do modelo sem capital ( $r_{BS}^*$ ) elevado a  $1 - \alpha$ . Por conseguinte, os determinantes da taxa de crescimento de equilíbrio de longo prazo são os mesmos que em Barro e Sala-i-Martin (2004, cap. 6), atuando no mesmo sentido, ainda que com intensidade diferente. Com efeito,  $g^*$  depende dos coeficientes de preferência das famílias,  $\theta$  e  $\rho$ , e da componente exógena da produtividade total dos fatores,  $A$ . O modelo contém um efeito de escala, na medida em que a dotação do fator trabalho  $L$  afeta positivamente a taxa de crescimento económico.<sup>10</sup> Uma diminuição do custo  $\eta$  que um inovador enfrenta tem um efeito positivo sobre a taxa de retorno em (3.18) e, por extensão, sobre a taxa de crescimento  $g^*$ . No caso do modelo com capital físico, estes efeitos serão menos acentuados que no modelo sem capital, refletindo o conhecido mecanismo neoclássico dos rendimentos marginais decrecentes associados ao capital físico. Estes efeitos fazem-se sentir em virtude da relação estreita entre as atividades de I&D e a acumulação de capital físico no modelo (a acumulação de capital físico é necessária à expansão de variedades, que, por sua vez, atua como motor de crescimento ao longo do BGP).

Através de uma breve e simples análise numérica, podemos ilustrar quantitativamente estas diferenças. Para tal, calculamos a elasticidade ( $E$ ) da taxa de crescimento de equilí-

<sup>10</sup>A discussão sobre esta última relação não é recente, tendo sido a sua validade empírica questionada (Jones, 1995a). Neste sentido, no ponto seguinte apresentamos uma versão do modelo sem efeitos de escala sobre o crescimento, considerando duas medidas de escala diferentes.

brio,  $g^*$ , face ao custo do I&D,  $\eta$ , para o modelo sem capital físico e para o modelo com capital físico

$$E_{BS} = -1 - \frac{\rho}{\theta \cdot g_{BS}^*}$$

$$E = -(1 - \alpha) - \frac{(1 - \alpha) \cdot \rho}{\theta \cdot g^*},$$

em que o subscrito  $BS$  denota, uma vez mais, as variáveis no modelo de Barro e Sala-i-Martin (2004, cap. 6). Considerando  $\rho = 0.02$ ,  $\theta = 1.5$ ,  $\alpha = 1/3$  (valores utilizados em Gil et al., 2017) e uma taxa de crescimento do produto,  $g^*$ , de 0.02 (valor admitido em Barro e Sala-i-Martin, 2004), temos que  $E_{BS} = -1.6(6)$  e  $E = -1.1(1)$ . Tal significa que, enquanto no caso em que não se considera capital, uma diminuição de 1% do custo do I&D ( $\eta$ ) provoca um aumento de 1.6(6)% da taxa de crescimento do produto de BGP ( $g^*$ ), quando se considera capital, esse aumento é menos pronunciado, sendo de 1.1(1)%.

Esta diferença foi calculada admitindo que a proporção do capital no rendimento,  $\alpha$ , tem o valor usualmente considerado na literatura de 1/3. No entanto, estudos recentes (FMI, 2007; OCDE, 2012; OIT e OCDE, 2015) mostram que existe uma tendência descendente da proporção do trabalho no rendimento (e, implicitamente, um aumento da proporção do capital no rendimento),<sup>11</sup> indicando, por essa via, que devemos considerar um valor para  $\alpha$  mais elevado. Atribuindo, por exemplo, um valor de 0.45 a  $\alpha$ ,<sup>12</sup> a elasticidade da taxa de crescimento do produto face ao custo de I&D,  $E$ , é agora de  $-0.916(6)$ . Desta forma, com base na tendência da *share* do capital apontada pelas investigações empíricas citadas, a elasticidade da taxa de crescimento do produto face ao custo do I&D passa de um valor em módulo superior à unidade (sendo, portanto,  $g^*$  elástica face a  $\eta$ ) para um valor inferior a um (revelando inelasticidade de  $g^*$  face a  $\eta$ ). Assim, à luz destes novos dados empíricos, o nosso modelo prevê um efeito quantitativo de  $\eta$  sobre  $g^*$  bastante inferior (a diferença é de 0.75 pontos percentuais, quando se considera uma variação de 1% de  $\eta$ ) ao de Barro e Sala-i-Martin (2004, cap.6), espelhando o impacto do mecanismo de rendimentos marginais decrescentes associados ao capital físico (na medida em que é indispensável ao processo de inovação) sobre o crescimento de longo prazo.

### 3.6 Efeitos de escala

Como foi referido no ponto anterior, o modelo apresentado contém um efeito de escala, uma vez que existe uma influência positiva da dotação do fator trabalho  $L$  sobre a taxa de

<sup>11</sup>Dados mais recentes podem ser consultados em: <http://www.ilo.org/global/statistics-and-databases/lang-en/index.htm>

<sup>12</sup>Valor implícito do estudo OIT e OCDE (2015), calculado para um conjunto de países do G20.

crescimento de *steady state*,  $g^*$ . Jones (1995a) criticou esta característica dos primeiros modelos de crescimento endógeno baseados em atividades de I&D já que, empiricamente, a tendência observada no nível da força de trabalho não é acompanhada por uma tendência semelhante das taxas de crescimento do PIB per capita. Neste ponto, pretende-se acomodar esta evidência empírica, removendo os efeitos escala sobre o crescimento, considerando duas medidas alternativas: o fator trabalho  $L$  ou o produto final por linha de variedade  $Y/N = A \cdot L \cdot k^\alpha$  (ver eq. (3.13)).<sup>13</sup> Com esse objetivo, estas alterações podem ser consubstanciadas na função produção de conhecimento (3.14), considerando que o custo do I&D é proporcional (a) ao fator trabalho ou (b) ao produto por linha de variedade<sup>14</sup>

$$R_n^a(t) = \eta \cdot L \cdot \dot{N}(t) \quad (1.14.a)$$

$$R_n^b(t) = \eta \cdot A \cdot L \cdot k^\alpha \cdot \dot{N}(t) \quad (1.14.b)$$

As modificações na função produção de conhecimento implicam que a condição de entrada livre, que se traduz na igualdade entre o benefício de entrada no mercado e o respetivo custo, venha também ela alterada, tal que, para os dois casos considerados,

$$V^a(t) = \eta \cdot L \quad (1.16.a)$$

$$V^b(t) = \eta \cdot A \cdot L \cdot k^\alpha. \quad (1.16.b)$$

Consequentemente, a condição de não-arbitragem (3.18) transforma-se em

$$r_a(t) = \frac{\Pi(t)}{\eta \cdot L} \quad (1.18.a)$$

$$r_b(t) = \frac{\Pi(t)}{\eta \cdot A \cdot L \cdot k^\alpha}. \quad (1.18.b)$$

Considerando (1.18.a), (1.18.b) e recordando (3.11), o capital de equilíbrio  $k^*$ , que na versão do modelo com efeitos de escala era dado por (3.22), continua a ser determinado pelos parâmetros do modelo, sendo constante e igual a

$$k_a^* = \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \cdot \eta \quad (1.22.a)$$

<sup>13</sup>Esta última solução é adotada em Barro e Sala-i-Martin (2004, cap. 6).

<sup>14</sup>Nas equações apresentadas nesta secção, os subscritos/sobrescritos  $a$  e  $b$  designam, respetivamente, as variáveis no caso em que a medida de escala relevante é o fator trabalho e no caso em que essa medida é o produto por linha de variedade.

$$k_b^* = \left( \frac{A \cdot \alpha \cdot \eta}{1 - \alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (1.22.b)$$

que, por extensão, implica que, mais uma vez,  $r = r^*$  seja constante (para os casos  $a$  e  $b$ ). Tudo o resto constante, dado que as condições da análise anterior se mantêm, e utilizando (3.11), (1.22.a) e (1.22.b) para determinar  $r_a^*$  e  $r_b^*$ , a taxa de crescimento de *steady state*  $g^*$  pode, por (3.3), ser explicitada à custa de  $r^*$ . Para o caso em que a medida de escala é a dotação do fator trabalho  $L$ , a taxa de crescimento de equilíbrio vem

$$g_a^* = \frac{1}{\theta} \cdot (r_a^* - \rho) = \frac{1}{\theta} \cdot \left[ \left( \frac{1}{\eta} \right)^{1-\alpha} \cdot A \cdot \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} \cdot \alpha^2 - \rho \right].$$

Esta expressão é semelhante a (3.25), com a exceção de que  $g_a^*$  passa a não depender do nível do fator trabalho, sendo o efeito de escala sobre o crescimento removido. Por outro lado, quando consideramos explicitamente que a medida de escala relevante é o produto por linha de variedade,  $Y/N$ , a taxa de crescimento é dada por

$$g_b^* = \frac{1}{\theta} \cdot (r_b^* - \rho) = \frac{1}{\theta} \cdot \left[ \frac{\alpha \cdot (1-\alpha)}{\eta} - \rho \right],$$

que é exatamente igual à prevista pelo modelo de Barro e Sala-i-Martin (2004, cap. 6). Neste caso, o modelo não exibe efeitos de escala sobre o crescimento, passando  $g_b^*$  a não depender positivamente da dotação do fator trabalho  $L$  nem da componente exógena da produtividade total dos fatores  $A$ . É interessante notar que, neste cenário, também deixa de existir o efeito dos rendimentos marginais decrescentes associados ao capital físico. Em qualquer um dos casos, os coeficientes de preferência das famílias continuam a atuar no mesmo sentido e, tal como na análise de base, uma diminuição do custo fixo suportado pelos inovadores de forma a entrarem no mercado, tem um efeito positivo sobre a taxa de retorno e sobre a taxa de crescimento de longo prazo.

## 4 Modelo com restrição CIA no consumo e nas atividades de I&D

Tendo como base o modelo sem esfera monetária apresentado no capítulo anterior, modelizamos a procura de moeda através da introdução de uma restrição *Cash-in-Advance* (CIA) no consumo e no investimento em atividades de I&D,<sup>15</sup> à semelhança da abordagem de Chu e Cozzi (2014). Esta escolha pode ser justificada por se verificar, empiricamente, que existe uma sensibilidade das despesas em I&D face a restrições de liquidez (Brown e Petersen, 2009). Neste capítulo, apenas apresentamos as expressões que, face à introdução de esfera monetária, são alteradas (relativamente ao modelo de base).

### 4.1 Famílias

As famílias, que consomem, existem em número constante e têm um horizonte de vida infinito, obtendo rendimento do trabalho e do investimento em ativos financeiros e oferecendo inelasticamente trabalho,  $L$ , às empresas de bem final. Sendo perfeitamente racionais, escolhem, tal como no capítulo anterior, o trajeto do consumo que lhes permite maximizar a utilidade intertemporal

$$U = \int_0^{\infty} \left( \frac{C(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) \cdot e^{-\rho t} dt, \quad (4.1)$$

onde  $\theta$  e  $\rho$  têm o mesmo significado que na versão de base. De forma diferente, essa maximização está agora sujeita à restrição orçamental em fluxos:

$$\dot{a}(t) + \dot{m}(t) = r(t) \cdot a(t) + w(t) \cdot L - C(t) + \tau(t) - \pi(t) \cdot m(t) + i(t) \cdot b(t), \quad (4.2)$$

em que  $a(t)$ ,  $r(t)$ ,  $w(t)$ ,  $L$  e  $C(t)$  não diferem do modelo de base,  $\tau(t)$  denota as transferências *lump-sum* do governo para as famílias (ou imposto, caso  $\tau(t) < 0$ ),  $\pi(t)$  é a taxa de inflação que determina o custo de deter moeda,  $m(t)$  são as disponibilidades reais de moeda e  $b(t)$  é o montante real de empréstimos, com maturidade de um período, concedido pelas famílias aos inovadores para financiar o investimento em I&D, com um retorno

<sup>15</sup>No estudo seminal de Stockman (1981), a restrição CIA incidia sobre o consumo e o investimento em capital físico. No capítulo seguinte, estendemos a nossa análise de forma a incorporar, adicionalmente, uma restrição de liquidez sobre o investimento em capital físico. Dadas as especificidades do nosso modelo (oferta de trabalho inelástica e especificação *lab-equipment* do I&D), a restrição CIA no consumo é negligenciável. Não obstante, optámos por apresentá-la.

associado de  $i(t)$ . A restrição CIA é dada por  $\xi C(t) + b(t) \leq m(t)$ , onde  $\xi > 0$  é a magnitude da restrição CIA no consumo.<sup>16</sup> Esta restrição de liquidez traduz-se, na tradição de Stockman (1981), ainda que incidindo sobre setores distintos, na necessidade dos agentes económicos disporem de disponibilidades monetárias para financiarem o consumo e as atividades de I&D. Como foi referido anteriormente, devido à configuração particular do nosso modelo, a magnitude da restrição de liquidez no consumo não terá influência sobre os resultados obtidos.

Pela Teoria do Controlo Ótimo e pelo Princípio do Máximo de Pontriaguine, define-se uma função auxiliar (Hamiltoniano):<sup>17</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \left( \frac{C(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) \cdot e^{-\rho t} + \\ & v(t) \cdot (r(t) \cdot a(t) + w(t) \cdot L - C(t) + \tau(t) - \pi(t) \cdot m(t) + i(t) \cdot b(t)) + \\ & \lambda(t) \cdot (\xi C(t) + b(t) - m(t)) \end{aligned}$$

em que  $a(t)$  e  $m(t)$  são as variáveis estado,  $v(t)$  e  $\lambda(t)$  são as variáveis co-estado e  $C(t)$  e  $b(t)$  são as variáveis controlo. As condições de primeira ordem são (pelo Princípio do Máximo):

$$a) \partial \mathcal{H} / \partial C(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-\rho t} \cdot C(t)^{-\theta} = v(t) - \lambda(t) \cdot \xi$$

$$b) \partial \mathcal{H} / \partial b(t) = 0 \Leftrightarrow v(t) \cdot i(t) + \lambda(t) = 0$$

$$c) \partial \mathcal{H} / \partial a(t) = -\dot{v}(t) \Leftrightarrow v(t) \cdot r(t) = -\dot{v}(t)$$

$$d) \partial \mathcal{H} / \partial m(t) = -\dot{\lambda}(t) \Leftrightarrow -v(t) \cdot \pi(t) - \lambda(t) = -\dot{\lambda}(t)$$

$$e) \partial \mathcal{H} / \partial v(t) = \dot{a}(t) + \dot{m}(t)$$

<sup>16</sup>Feenstra (1986) define o parâmetro  $\xi$  como o período de tempo em que é necessário os agentes deterem moeda, de forma a financiarem as suas despesas de consumo. Wang e Yip (1992), na sua discussão sobre as diferentes formas de modelizar a procura de moeda, utilizam o caso particular em que  $\xi = 1$ .

<sup>17</sup>Salienta-se que Chu e Cozzi (2014) não explicitam o problema de otimização intertemporal das famílias na presença de restrições CIA.



$$f) \partial \mathcal{H} / \partial \lambda(t) = 0$$

$$g) \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) \cdot a(t) = 0$$

Note-se que, através de  $f$ ), se assume que a restrição CIA está ativa. Por  $b$ ),  $c$ ) e  $d$ ), temos  $v(t) \cdot r(t) = -v(t) \cdot \pi(t) + v(t) \cdot i(t)$ . Dividindo ambos os lados da expressão por  $v(t)$  e reorganizando os termos, chegamos à condição de não arbitragem<sup>18</sup>

$$i(t) = r(t) + \pi(t).$$

Ou seja, o retorno de  $b(t)$  é também a taxa de juro nominal. Por outro lado, de  $a$ ) e  $b$ ) resulta  $e^{-\rho t} \cdot C(t)^{-\theta} = v(t) \cdot (1 + \xi \cdot i(t))$ . Aplicando logaritmos a esta expressão e diferenciando em relação ao tempo, podemos utilizar  $c$ ) para obter:

$$-\rho - \theta \cdot \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = -r(t) + \frac{\xi \cdot \dot{i}(t)}{1 + \xi \cdot i(t)}$$

Como será explicado numa secção posterior (4.3), é assumido, no âmbito deste modelo, que o instrumento de política monetária é a taxa de juro nominal,  $i(t)$ , sendo a mesma escolhida exogenamente pela autoridade monetária. Assim, reordenando os termos da expressão apresentada acima, obtemos a conhecida Equação de Euler, que descreve a trajetória ótima do consumo, para dado  $i$ :

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta} \cdot (r(t) - \rho). \quad (4.3)$$

A condição de transversalidade é, neste caso, dada por

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\rho t} \cdot C(t)^{-\theta}}{1 + \xi \cdot i(t)} \cdot a(t) = 0 \quad (4.4)$$

## 4.2 I&D

O setor de I&D (em que a inovação continua a ser do tipo horizontal) mantém as suas características essenciais, excetuando algumas diferenças no que diz respeito à forma de financiamento das despesas de investigação. O custo fixo das atividades de I&D continua a ser dado por  $\eta$ . No entanto, nesta versão do modelo, admite-se que o inovador necessita de deter moeda para financiar parte dessas despesas. Desta forma, o inovador recorre a

<sup>18</sup>Esta condição expressa o efeito de Fisher.

empréstimos das famílias, sujeitos a uma taxa de juro nominal  $i(t)$ . Tal como na abordagem adotada por Chu e Cozzi (2014), a restrição CIA constitui um constrangimento de liquidez na medida em que, por pressuposto teórico, é exigido que o montante emprestado pelas famílias apenas seja pago após um determinado período de tempo. Como foi mencionado no início deste capítulo, assume-se que o montante de empréstimos tem maturidade de um período. O que distingue os dois modelos, relativamente à restrição de liquidez, é apenas o tipo de custo suportado pelos inovadores. Em Chu e Cozzi (2014), esse custo destina-se ao pagamento de salários no setor de I&D (por se admitir uma especificação *knowledge-driven* do I&D), enquanto no modelo aqui apresentado o custo é dado em termos de bem final (por se tratar de uma especificação *lab-equipment* do I&D). A magnitude da restrição CIA admitida neste setor pode ser traduzida pelo parâmetro  $\beta \in [0, 1]$ , que é a fração das despesas em I&D financiadas por empréstimos das famílias.<sup>19</sup>

A função produção de conhecimento é independente da restrição CIA, sendo equivalente à apresentada na Secção 3.3. Assim, ao nível agregado, o montante de recursos dedicados ao I&D continua a ser dado por

$$R_n(t) = \eta \cdot \dot{N}(t). \quad (4.5)$$

No entanto, o custo de entrada tem, nesta versão do modelo, uma componente operacional de I&D e uma componente financeira. A condição de entrada livre, que se traduz na igualdade entre o benefício de entrada no mercado e o respetivo custo, é assim dada por  $\dot{N} \cdot V(t) = (1 - \beta) \cdot R_n + \beta \cdot (1 + i) \cdot R_n = R_n + \beta \cdot i \cdot R_n$  que, considerando (4.5), simplifica para

$$V(t) = (1 + \beta \cdot i) \cdot \eta. \quad (4.6)$$

Por conseguinte, a condição de não arbitragem vem

$$r(t) = \frac{\Pi(t)}{(1 + \beta \cdot i) \cdot \eta}. \quad (4.7)$$

### 4.3 Autoridade Monetária

Nas secções anteriores descrevemos a forma como as restrições *Cash-in-Advance* são introduzidas no modelo e de que modo as mesmas influenciam as decisões dos agentes económicos. No entanto, esses constangimentos de liquidez serão influenciados pelo comportamento da autoridade que determina a política monetária. Assim, é necessária a

<sup>19</sup>Chu e Cozzi (2014) optam por estudar o caso particular em que  $\beta = 1$ .

introdução de uma autoridade monetária, sendo que a exposição sobre a sua ação, que a seguir apresentamos, é baseada em Chu e Cozzi (2014) e Chu e Ji (2016).

A oferta nominal de moeda é denotada por  $M(t)$  e a sua taxa de crescimento por  $\dot{M}(t)/M(t)$ . As disponibilidades reais de moeda são designadas por  $m(t) = M(t)/P(t)$ , onde  $P(t)$  denota o preço nominal do bem final. O instrumento de política monetária considerado é  $i(t)$ . Dada uma  $i(t)$  escolhida exogenamente pela autoridade monetária, a taxa de inflação é determinada endogenamente, de acordo com  $\pi(t) = i(t) - r(t)$ . Ou seja, as autoridades ajustam (exogenamente) a orientação de política monetária (por intermédio da taxa de juro nominal) de modo a acomodar um determinado nível de taxa de inflação objetivo a verificar-se no equilíbrio de longo prazo.<sup>20</sup> Assim, para dado  $\pi(t)$ , a taxa de crescimento da oferta nominal de moeda é determinada de forma endógena de acordo com  $\dot{M}(t)/M(t) = \dot{m}(t)/m(t) + \pi(t)$ . A autoridade monetária devolve às famílias a receita real de senhoriagem como uma transferência *lump-sum*  $\tau(t) = \dot{M}(t)/P(t) = \dot{m}(t) + \pi(t) \cdot m(t)$ . No *Balanced Growth Path*, tem-se  $g_m = g_C = g$  e,<sup>21</sup> logo, a taxa de juro nominal está relacionada com a taxa de crescimento da oferta nominal de moeda, de acordo com  $i(t) = r(t) + \pi(t) = \rho + \dot{M}(t)/M(t) - (1 - \theta) \cdot g$ .<sup>22</sup> Assim, é a taxa de crescimento da oferta nominal de moeda que, dada a escolha de  $i$  pela autoridade monetária, afeta a economia real neste modelo e não o nível da massa monetária.<sup>23</sup>

#### 4.4 Agregação Macroeconómica<sup>24</sup>

A riqueza financeira agregada de todas as famílias continua a ser dada por  $a(t) = K(t) + \int_0^{N(t)} V(\omega, t) d\omega$ , sendo equivalente, por (4.6), a

$$a(t) = K(t) + (1 + \beta \cdot i) \cdot \eta \cdot N(t) \quad (4.8)$$

Assim, a variação da riqueza agregada ao longo do tempo será

<sup>20</sup>Se tivermos em conta a representação usual da Regra de Taylor para a política monetária,  $i = \bar{i} + a \cdot (\pi - \bar{\pi}) + b \cdot [(Y - \bar{Y})/\bar{Y}]$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes positivas,  $\bar{\pi}$  representa o objetivo de taxa de inflação do banco central,  $\bar{Y}$  representa o produto de equilíbrio de longo prazo (produto natural) e  $\bar{i}$  representa a taxa de juro nominal desejada pelo banco central quando os *gaps* de inflação e de produto são nulos, então, no quadro do modelo de crescimento endógeno com esfera monetária, está-se implicitamente a considerar que  $\pi = \bar{\pi}$ ,  $Y = \bar{Y}$  e  $i = \bar{i}$ .

<sup>21</sup>Como se considera que a restrição CIA é ativa (ver Secção 4.1), i.e.,  $\xi C(t) + b(t) = m(t)$ , é fácil verificar que, no BGP,  $g_m = g_C = g$ .

<sup>22</sup>Dado que, no BGP, como já mostrado na Secção 3.5,  $g_C = g$ , então  $r = \theta \cdot g + \rho$ . Por outro lado,  $g_M = g_m + \pi = g_m + i - r$ . Como no BGP,  $g_m = g$ , então  $i = \rho + g_M - (1 - \theta) \cdot g$ .

<sup>23</sup>Tal significa que os resultados relativos ao efeito da política monetária sobre o crescimento económico são, no âmbito deste modelo, interpretados de acordo com o conceito de superneutralidade da moeda.

<sup>24</sup>Salienta-se que Chu e Cozzi (2014) e Chu e Ji (2016) não explicitam este passo na resolução dos seus modelos.

$$\dot{a}(t) = \dot{K}(t) + (1 + \beta \cdot i) \cdot \eta \cdot \dot{N}(t), \quad (4.9)$$

uma vez que  $\eta$  é constante. Utilizando (4.2), notando que  $\tau(t) = \dot{m}(t) + \pi(t) \cdot m(t)$  e dado que da maximização do lucro em relação ao trabalho resulta  $w = (1 - \alpha) \cdot (Y/L)$ , temos

$$(K + (1 + \beta \cdot i) \cdot \eta \cdot N) \cdot r + (1 - \alpha) \cdot Y - C + i \cdot b = \dot{K} + (1 + \beta \cdot i) \cdot \eta \cdot \dot{N}.$$

Recordando (3.11), (3.12), (3.13) e (4.7) (de modo a ter  $r \cdot K = \alpha^2 \cdot Y$  e  $(1 + \beta \cdot i) \cdot \eta \cdot N \cdot r = N \cdot \Pi = (1 - \alpha) \cdot \alpha \cdot Y$ ), e que  $b = \beta \cdot \eta \cdot \dot{N}$  e  $\eta \cdot \dot{N} = R_n$ , vem

$$Y(t) = \dot{K}(t) + C(t) + R_n(t), \quad (4.10)$$

que é a restrição orçamental agregada e a condição de equilíbrio no mercado de bem final.

## 4.5 Equilíbrio Geral Dinâmico

Tal como acontecia no modelo sem esfera monetária, a intensidade capitalística da economia,  $k^*$ , pode ser obtida a partir da arbitragem entre a taxa de retorno das atividades de I&D, (4.7), e a taxa de retorno do capital, (3.11), sendo igual a

$$k^* = \frac{\alpha \cdot (1 + \beta \cdot i) \cdot \eta}{(1 - \alpha) \cdot L}. \quad (4.11)$$

Para dado  $i$ ,  $k^*$  está constante, sendo determinado pelos parâmetros estruturais do modelo e pela escolha da taxa de juro nominal por parte da Autoridade Monetária. De forma equivalente à análise do modelo de base, levada a cabo para  $\eta$ , a taxa de juro nominal,  $i$ , tem um efeito positivo sobre a intensidade capitalística, na medida em que influencia o custo de I&D afetando, assim, negativamente o stock de conhecimento (número de variedades de bens intermédios) relativamente ao stock de capital físico.

Com  $i$  constante, aplicando logaritmos a (3.13) e diferenciando em relação ao tempo,<sup>25</sup> vem

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{N}(t)}{N(t)}.$$

A expressão para  $\dot{N}(t)/N(t)$  pode ser obtida a partir da restrição orçamental agregada (4.10) e do montante agregado de I&D,  $R_n$ , pela eq. (4.5)

<sup>25</sup>Com  $k^*$  dado por (4.11) e não por (3.22)

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \frac{1}{\eta \cdot N(t)} \cdot (A \cdot L \cdot N(t) \cdot k(t)^\alpha - \dot{K}(t) - C(t)) \quad (4.12)$$

Por outro lado, como, por (4.11),  $k^*$  está constante para dado  $i$ , então  $r$  também é constante por (3.11), com  $r^* = \left(\frac{L}{\eta}\right)^{1-\alpha} \cdot A \cdot \left[\frac{1-\alpha}{\alpha \cdot (1+\beta \cdot i)}\right]^{1-\alpha} \cdot \alpha^2$ . Então, pela eq. (3.9),  $X$  também é constante e, por (3.10), vem  $\dot{K}(t) = \dot{N}(t) \cdot X$ . Usando (4.11) e recordando que  $X = L \cdot k$  por (3.10), a equação diferencial para  $N(t)$  é dada por

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \frac{1-\alpha}{(1+\alpha \cdot \beta \cdot i) \cdot \eta} \cdot \left\{ A \cdot L^{1-\alpha} \cdot \left[ \frac{\alpha \cdot (1+\beta \cdot i) \cdot \eta}{1-\alpha} \right]^\alpha - \frac{C(t)}{N(t)} \right\}. \quad (4.13)$$

O sistema dinâmico em  $(C, N)$  que descreve a economia é composto por (4.13) e pela Equação de Euler, (4.3), ou seja

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta} \cdot \left\{ \left( \frac{L}{\eta} \right)^{1-\alpha} \cdot A \cdot \left[ \frac{1-\alpha}{\alpha \cdot (1+\beta \cdot i)} \right]^{1-\alpha} \cdot \alpha^2 - \rho \right\}. \quad (4.14)$$

Por (4.10) e (4.5), tem-se  $Y(t) = \dot{K}(t) + C(t) + \eta \cdot \dot{N}(t) \Leftrightarrow 1 = \frac{\dot{K}(t)}{Y(t)} + \frac{C(t)}{Y(t)} + \eta \cdot \frac{\dot{N}(t)}{Y(t)}$ . Então, no equilíbrio de longo prazo, para termos uma trajetória sustentada (BGP), é necessário, uma vez mais, que se verifique a seguinte condição para as taxas de crescimento das variáveis

$$g_Y^* = g_C^* = g_K^* = g_N^* = g_m^* = g^* = \frac{1}{\theta} \cdot (r^* - \rho), \quad (4.15)$$

sendo o último termo dado pela eq. (4.3). Definindo  $c(t) = C(t)/(L \cdot N(t))$ , com a propriedade de que, ao longo do BGP,  $\dot{c}(t) = 0$ , o sistema (4.13)-(4.14) é equivalente a

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \phi + \frac{(1-\alpha) \cdot L}{(1+\alpha \cdot \beta \cdot i) \cdot \eta} \cdot c(t), \quad (4.16)$$

em que

$$\phi = \frac{r^*}{\theta} - \left( \frac{1+\beta \cdot i}{1+\alpha \cdot \beta \cdot i} \right) \frac{r^*}{\alpha} - \frac{\rho}{\theta}.$$

A equação (4.16) tem dois pontos de equilíbrio, em  $c^* = 0$ , uma vez mais sem relevância económica, e em  $c^* = \frac{\phi \cdot (1+\alpha \cdot \beta \cdot i) \cdot \eta}{(\alpha-1) \cdot L}$ . Este ponto de equilíbrio (*steady state*) interior corresponde a uma trajetória de equilíbrio dinâmico (*Balanced Growth Path*) no sentido usual, como definido por (4.15), caracterizada por uma taxa de crescimento endógena positiva e constante. Pode-se mostrar que, para dado  $i$ , a análise de estabilidade é semelhante à desenvolvida no modelo sem esfera monetária, consistindo em determinar se  $\phi$  é negativo, positivo ou igual a zero. Recorde-se que a condição de convergência do integral

em (4.1) implica

$$\frac{\rho}{\theta} > \left( \frac{1-\theta}{\theta} \right) \cdot r.$$

Pelo Teorema da Estabilidade Local, como se mostra que  $\partial \dot{c} / \partial c|_{c=c^*} = -\phi$ , o ponto de equilíbrio interior será estável se  $\phi > 0$ , ou seja, se

$$\begin{aligned} \frac{r^*}{\theta} - \left( \frac{1+\beta \cdot i}{1+\alpha \cdot \beta \cdot i} \right) \frac{r^*}{\alpha} &> \frac{\rho}{\theta} > \left( \frac{1-\theta}{\theta} \right) \cdot r \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( \frac{1+\beta \cdot i}{1+\alpha \cdot \beta \cdot i} \right) \frac{1}{\alpha} &< 1, \end{aligned}$$

que, tendo em conta os valores admitidos para os parâmetros estruturais tecnológicos do modelo e  $i \geq 0$ , nunca se verifica. Por conseguinte, concluímos que o ponto de equilíbrio interior é instável.<sup>26</sup> Com  $\phi < 0$ , garante-se também que  $c^* > 0$ . Desta forma, os agentes terão que se colocar, para todo o  $t$ , sobre o *Balanced Growth Path*, para evitar o crescimento explosivo. Assim sendo, não existe dinâmica de transição no modelo com esfera monetária.

Por (4.14), concluímos que a taxa de crescimento de equilíbrio diminui com a taxa de juro nominal,  $i$ .<sup>27</sup> A explicação é simples: um aumento da taxa de juro nominal provoca uma diminuição da taxa de retorno do I&D, desincentivando potenciais empreendedores de prosseguirem as atividades de inovação que, em última análise, determinam o crescimento de longo prazo. Este resultado é semelhante ao de Chu e Cozzi (2014), ainda que com algumas diferenças. O efeito de uma descida da taxa de juro nominal sobre a taxa de crescimento de equilíbrio é, no nosso modelo, atenuado pelo expoente  $1 - \alpha$ , refletindo o mecanismo neoclássico de rendimentos marginais decrescentes associados ao capital físico (que não existe na economia de Chu e Cozzi, 2014), e que resulta da articulação entre o processo de inovação e a acumulação de capital. Ao consideramos o caso mais geral de  $\beta \in [0, 1]$ , que denota a fração do custo em I&D sujeita à restrição de liquidez, este parâmetro também está presente na eq. (4.14), sendo passível de influenciar negativamente a taxa de crescimento de equilíbrio. Por último, como já havíamos referido no início deste capítulo, dadas as particularidades do *setup* admitido para o nosso modelo, a magnitude da restrição CIA no consumo,  $\xi$ , contrariamente ao que acontece em Chu e Cozzi (2014), não tem qualquer influência sobre  $g^*$ .

Recordando também que, no *Balanced Growth Path*,  $i = \rho + \dot{M}/M - (1 - \theta) \cdot g$ , o

<sup>26</sup>Note-se que os valores admitidos para os parâmetros do modelo também tornam impossível que se verifique  $\left( \frac{1+\beta \cdot i}{1+\alpha \cdot \beta \cdot i} \right) \frac{1}{\alpha} = 1$ , levando-nos a concluir que o ponto de equilíbrio interior é hiperbólico.

<sup>27</sup>De forma equivalente, como  $\pi = i - r$ , existe um impacto negativo da inflação sobre o crescimento económico.

nosso resultado aponta para a rejeição da proposição da superneutralidade da moeda relativamente à taxa de crescimento do produto, à semelhança das conclusões dos estudos de Chu et al. (2012), Chu e Lai (2013) e Chu e Cozzi (2014). Huang et al. (2013) também demonstram que não existe superneutralidade da moeda; no entanto, o seu resultado revela uma relação positiva entre taxa de juro nominal e taxa de crescimento.

Quantitativamente, podemos recuperar a análise realizada no Capítulo 1, mas agora no que diz respeito à elasticidade da taxa de crescimento de *steady state*,  $g^*$ , dada por (4.14), face à taxa de juro nominal,  $i$ . Neste caso,

$$E = \frac{i \cdot (\alpha - 1) \cdot \beta \cdot (g^* \cdot \theta + \rho)}{g^* \cdot \theta \cdot (1 + i \cdot \beta)}.$$

Os valores atribuídos aos parâmetros estruturais do modelo,  $\rho$ ,  $\theta$  e  $\alpha$ , permanecem inalterados, sendo equivalentes a 0.02, 1.5 e 1/3, respetivamente. O valor considerado para a taxa de crescimento  $g^*$  é, tal como na análise do capítulo anterior, 0.02. Relativamente a  $\beta$ , admitimos o caso especial em que toma o valor 1, o que equivale a assumir que a restrição CIA incide sobre a totalidade do investimento em I&D. A variável de política,  $i$ , é calibrada considerando um valor para a taxa de inflação de 2.5%,<sup>28</sup> sendo assim igual a 0.075.<sup>29</sup> Para os valores considerados, vem  $E = -0.078$ , o que revela inelasticidade da taxa de crescimento de equilíbrio,  $g^*$ , face à taxa de juro nominal,  $i$ . Considerando, alternativamente,  $\alpha = 0.45$  (que, tal como mencionado no capítulo anterior, está em linha com os dados empíricos sobre a tendência da proporção do capital no rendimento), o valor resultante da elasticidade passa a ser de  $-0.064$ . Desta forma, concluímos que, embora haja, teoricamente, através de (4.14), um efeito negativo de  $i$  em  $g^*$ , em termos quantitativos, esse impacto parece ser muito reduzido. Se considerarmos um valor mais elevado de  $\alpha$ , tal como é indicado pelos estudos empíricos que citámos no capítulo anterior, a sensibilidade da taxa de crescimento de equilíbrio a variações da taxa de juro nominal é ainda menos acentuada. Este pequeno exemplo numérico mostra que, de acordo com o presente modelo, a política de estabilização macroeconómica, na sua vertente monetária, tem um efeito reduzido sobre a taxa de crescimento económico de longo prazo, que diminui à medida que a proporção do capital no rendimento aumenta. A manter-se a tendência de subida de  $\alpha$ , poderemos caminhar para uma situação de (quase) superneutralidade da moeda, um resultado previsto pelo modelo de Chu e Ji (2016).

<sup>28</sup>Esta é a taxa média de inflação nos EUA nas duas décadas passadas, de acordo com Chu et al. (2017).

<sup>29</sup>Recorde-se que  $i = r + \pi$ . O valor de  $r$  pode ser obtido a partir de (4.15).

## 4.6 Regra de Friedman e Bem-Estar Social

Nesta secção, analisamos o efeito da política monetária sobre o bem-estar social. Mais concretamente, pretende-se averiguar se a regra de Friedman é ótima, isto é, se uma taxa de juro nominal igual a zero maximiza o bem-estar. Dado que, tal como demonstrado na secção anterior, nesta economia, os agentes se colocam, para todo o  $t$ , sobre o *Balanced Growth Path*, podemos usar (4.15) em (4.1) para obter

$$U = \frac{1}{1-\theta} \int_0^\infty C(0)^{1-\theta} \cdot e^{[(1-\theta) \cdot g^* - \rho] \cdot t} + e^{-\rho t} dt.$$

Normalizando  $C(0)$  para a unidade e resolvendo o integral, vem

$$U = -\frac{1}{(1-\theta) \cdot [(1-\theta) \cdot g^* - \rho]} - \frac{1}{\rho \cdot (1-\theta)}.$$

Utilizando (4.14), a derivada de  $U$  em relação a  $i$  é dada por<sup>30</sup>

$$\frac{\partial U}{\partial i} = \frac{(\alpha-1) \cdot \beta \cdot \left[ \left( \frac{L}{\eta} \right)^{1-\alpha} \cdot A \cdot \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{1-\alpha} \cdot \alpha^2 \cdot (1+\beta \cdot i)^{\alpha-2} \right]}{\theta \cdot [(1-\theta) \cdot g^* - \rho]^2}.$$

Assim, tendo em conta os valores admitidos para os parâmetros estruturais do modelo, e impondo a restrição  $i \geq 0$ , é fácil verificar que  $\partial U / \partial i < 0$ . Como a utilidade diminui com a taxa de juro nominal, que se assume habitualmente ser não negativa, conclui-se que a regra de Friedman é ótima, ou seja,  $i = 0$  maximiza o bem-estar social.

<sup>30</sup>Pela derivada da função composta,  $\partial U / \partial i = \partial U / \partial g^* \cdot \partial g^* / \partial i$ .



## 5 Modelo com restrição CIA no consumo, atividades de I&D e bens de capital

Neste capítulo, estendemos a análise realizada no capítulo anterior, incorporando uma restrição de liquidez no setor de bens intermédios. Assume-se, tal como no caso em que a restrição CIA incidia sobre o investimento em I&D, que uma fração do custo dos bens intermédios tem de ser financiada com recurso a moeda, que é, uma vez mais, obtida através de empréstimos das famílias. Esta análise é semelhante à proposta por Chu e Cozzi (2014), sendo que estes autores consideram o fator trabalho como o único *input* do setor de bens intermédios. Na exposição que se segue, apenas apresentamos a secção referente às decisões de preços e produção (antes das secções relativas à agregação macroeconómica e ao equilíbrio geral dinâmico), uma vez que as restantes secções (4.1, 4.2 e 4.3) permanecem inalteradas.<sup>31</sup>

### 5.1 Decisão de produção e preços

A empresa que produz o bem final utiliza uma tecnologia com rendimentos constantes à escala, usando trabalho e um contínuo de bens intermédios com medida  $N(t)$ , variando ao longo do tempo,  $t$

$$Y(t) = A \cdot L^{1-\alpha} \int_0^{N(t)} X(\omega, t)^\alpha d\omega, 0 < \alpha < 1, \quad (5.1)$$

onde  $A > 0$ ,  $L$ ,  $1 - \alpha$  e  $X(\omega, t)$  têm o mesmo significado que nos capítulos anteriores.

Os produtores de bens finais são *price-takers*, admitindo como dados os salários  $w(t)$  e o preço dos inputs  $p(\omega, t)$ , vendendo o seu produto a um preço também tomado como dado. Todos os preços e salários estão normalizados pelo preço do bem final (tratam-se, assim, de preços e salários reais). Das condições de maximização do lucro, a procura agregada do bem intermédio  $\omega$  é dada por

$$X(\omega, t) = L \cdot \left( \frac{A \cdot \alpha}{p(\omega, t)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \omega \in [0, N(t)]. \quad (5.2)$$

O bem intermédio é não durável e é produzido utilizando capital, de acordo com a função de produção

$$X(\omega, t) = K(\omega, t) \quad (5.3)$$

<sup>31</sup>Contudo,  $b(t)$ , presente na restrição orçamental em fluxos (eq. (4.2)), inclui agora, adicionalmente, o montante de empréstimos concedidos aos produtores de bens intermédios.

onde  $K(\omega, t)$  é o input do capital no setor  $\omega$ . Definindo  $\Omega \in [0, 1]$  como a fração do custo que é financiada com recurso a empréstimos,<sup>32</sup> o bem intermédio é produzido com uma função custo  $(1 + \Omega \cdot i(t)) \cdot r(t) \cdot K(\omega, t) = (1 + \Omega \cdot i(t)) \cdot r(t) \cdot X(\omega, t)$ , onde o custo do capital é a taxa de juro real de equilíbrio ajustada pelo efeito da restrição CIA,  $(1 + \Omega \cdot i(t)) \cdot r(t)$ . O setor de bens intermédios consiste num contínuo  $N(t)$  de indústrias. Existe concorrência monopolística se considerarmos o setor como um todo: o monopolista na indústria  $\omega$  fixa o preço  $p(\omega, t)$ , mas enfrenta a curva da procura isoelástica (5.2). O lucro na indústria  $\omega$  é dado por  $\Pi(\omega, t) = (p(\omega, t) - (1 + \Omega \cdot i(t)) \cdot r(t)) \cdot X(\omega, t)$ . O preço que maximiza o lucro é uma *markup* sobre o custo marginal

$$p(\omega, t) \equiv p(t) = \frac{(1 + \Omega \cdot i(t)) \cdot r(t)}{\alpha} > 1, \quad (5.4)$$

que é constante entre indústrias, mas possivelmente variável ao longo do tempo. A partir de (5.2) e (5.4), a quantidade agregada produzida de  $\omega$  é

$$X(\omega, t) = X(t) = L \cdot \left( \frac{A \cdot \alpha^2}{(1 + \Omega \cdot i(t)) \cdot r(t)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (5.5)$$

Por outro lado, o equilíbrio no mercado de capital implica que

$$K(t) = \int_0^{N(t)} K(\omega, t) d\omega = \int_0^{N(t)} X(\omega, t) d\omega = N(t) \cdot X(t). \quad (5.6)$$

Assim, juntando (5.5) e (5.6), temos

$$r(t) = \frac{A \cdot \alpha^2 \cdot k(t)^{\alpha-1}}{1 + \Omega \cdot i(t)}, \quad (5.7)$$

onde  $k \equiv K/(NL)$ . Esta equação expressa a condição de que o custo do capital tem de igualar a sua produtividade marginal,<sup>33</sup> ajustada pelo efeito da *markup*,  $1/\alpha$ . Usando (5.4) e (5.7), chegamos ao lucro ótimo do monopolista em  $\omega$

$$\Pi(\omega, t) = A \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot L \cdot k(t)^\alpha. \quad (5.8)$$

Substituindo (5.6) em (5.1), temos

$$Y(t) = A \cdot L \cdot N(t) \cdot k(t)^\alpha. \quad (5.9)$$

Note-se que (5.8) e (5.9) são idênticas a (3.12) e (3.13), na versão de base do modelo, sem restrições CIA.

<sup>32</sup>A modelização da restrição CIA é idêntica à do capítulo anterior (ver Secção 4.2).

<sup>33</sup>O custo do capital é agora igual a  $(1 + \Omega \cdot i(t)) \cdot r(t)$ .

## 5.2 Agregação Macroeconómica

De forma idêntica à exposição do capítulo anterior (ver Secção 4.4), a riqueza das famílias e a sua variação são dadas, respetivamente, por (4.8) e (4.9). Utilizando a restrição orçamental das famílias, (4.2), lembrando que  $\tau(t) = \dot{m}(t) + \pi(t) \cdot m(t)$  e dado que da maximização do lucro em relação ao trabalho resulta  $w = (1 - \alpha) \cdot (Y/L)$ , temos

$$(K + (1 + \beta \cdot i) \cdot \eta \cdot N) \cdot r + (1 - \alpha) \cdot Y - C + i \cdot b = \dot{K} + (1 + \beta \cdot i) \cdot \eta \cdot \dot{N}.$$

Recordando (5.7), (5.8), (5.9) e (4.7) (de modo a ter  $r \cdot K = \alpha^2 \cdot Y / (1 + \Omega \cdot i)$  e  $(1 + \beta \cdot i) \cdot \eta \cdot N \cdot r = N \cdot \Pi = (1 - \alpha) \cdot \alpha \cdot Y$ ), e que o montante de empréstimos,  $b$ , é agora dado por  $b = \beta \cdot \eta \cdot \dot{N} + \Omega \cdot r \cdot K$  e que  $\eta \cdot \dot{N} = R_n$ , vem

$$Y(t) = \dot{K}(t) + C(t) + R_n(t), \quad (5.10)$$

que é a restrição orçamental agregada e a condição de equilíbrio no mercado de bem final.

## 5.3 Equilíbrio Geral Dinâmico e Bem-Estar Social

Uma vez que, por arbitragem, a taxa de remuneração do capital em (5.7) tem de igualar a taxa de retorno das atividades de I&D em (4.7), a intensidade capitalística da economia,  $k^*$ , é dada por:

$$k^* = \frac{\alpha \cdot (1 + \beta \cdot i) \cdot \eta}{(1 - \alpha) \cdot (1 + \Omega \cdot i) L}. \quad (5.11)$$

Para dado  $i$ ,  $k^*$  está constante, sendo determinado pelos parâmetros estruturais do modelo e pela escolha da taxa de juro nominal por parte da Autoridade Monetária. No entanto, ao contrário do que acontecia no capítulo anterior, a taxa de juro nominal,  $i$ , tem um efeito indeterminado sobre a intensidade capitalística de equilíbrio da economia, estando dependente dos coeficientes que representam a magnitude das restrições CIA. De acordo com o estudo empírico de Brown e Petersen (2009), que se foca em empresas industriais nos EUA entre 1970 e 2006, a sensibilidade do investimento ao *cash-flow*, no período em questão, desaparece em grande escala no investimento físico,<sup>34</sup> mantendo-se comparativamente forte no investimento em I&D. Assim sendo, admitindo que  $\beta > \Omega$ , um aumento da taxa de juro nominal continuará a ter um impacto positivo sobre a intensidade capitalística.

<sup>34</sup>Uma das razões apontadas por Brown e Petersen (2009) para esta redução é a diminuição da importância do investimento físico na composição do investimento total.

Aplicando logaritmos a (5.9) e diferenciando em relação ao tempo, vem

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{N}(t)}{N(t)}.$$

A expressão para  $\dot{N}(t)/N(t)$  é obtida a partir da restrição orçamental agregada (5.10) e do montante agregado de I&D,  $R_n$ , pela eq. (4.5). Verificando também que, como, por (5.11),  $k^*$  está constante para dado  $i$ , então  $r$  também é constante por (5.7), com  $r^* = \left(\frac{L}{\eta}\right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} \cdot \frac{A \cdot \alpha^2}{(1+\Omega \cdot i)^\alpha \cdot (1+\beta \cdot i)^{1-\alpha}}$ . Então, pela eq. (5.5),  $X$  também é constante e, por (5.6), vem  $\dot{K}(t) = \dot{N}(t) \cdot X$ . Utilizando (5.11) e recordando que  $X = L \cdot k$  por (5.6), a equação diferencial para  $N(t)$  é dada por

$$\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = \kappa \cdot \left\{ A \cdot L^{1-\alpha} \cdot \left[ \frac{\alpha \cdot (1+\beta \cdot i) \cdot \eta}{(1-\alpha) \cdot (1+\Omega \cdot i)} \right]^\alpha - \frac{C(t)}{N(t)} \right\}, \quad (5.12)$$

com  $\kappa = \frac{(1-\alpha) \cdot (1+\Omega \cdot i)}{[\alpha \cdot (\beta - \Omega) + \Omega] \cdot i + 1} \cdot \eta$ . O sistema dinâmico em  $(C, N)$  que descreve a economia é constituído por (5.12) e pela Equação de Euler, (4.3), que, dada a nova expressão para  $r^*$ , vem

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{1}{\theta} \cdot \left\{ \left(\frac{L}{\eta}\right)^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} \cdot \frac{A \cdot \alpha^2}{(1+\Omega \cdot i)^\alpha \cdot (1+\beta \cdot i)^{1-\alpha}} - \rho \right\}. \quad (5.13)$$

A existência de um *Balanced Growth Path* implica que se verifique, novamente, a seguinte condição para as taxas de crescimento das variáveis

$$g_Y^* = g_C^* = g_K^* = g_N^* = g_m^* = g^* = \frac{1}{\theta} \cdot (r^* - \rho), \quad (5.14)$$

em que o último termo vem da Equação de Euler, que descreve a trajetória ótima do consumo. Repetindo o exercício dos capítulos anteriores, definimos  $c(t) = C(t)/(L \cdot N(t))$ , com a propriedade de que, ao longo do BGP,  $\dot{c}(t) = 0$ . Então, o sistema (5.12)-(5.13) é equivalente a

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \phi + \left\{ \frac{(1-\alpha) \cdot (1+\Omega \cdot i)}{[(1-\alpha) \cdot \Omega \cdot i + \alpha \cdot \beta \cdot i + 1] \cdot \eta} \right\} \cdot L \cdot c(t), \quad (5.15)$$

onde

$$\phi = \frac{r^*}{\theta} - \left[ \frac{1 + \Omega \cdot i + \beta \cdot i + \Omega \cdot \beta \cdot i^2}{1 + \Omega \cdot i + \alpha \cdot \beta \cdot i - \alpha \cdot \Omega \cdot i} \right] \frac{r^*}{\alpha} - \frac{\rho}{\theta}.$$

A equação (5.15) tem um ponto de equilíbrio (*steady state*) interior em

$$c^* = - \frac{\phi \cdot [(1 - \alpha) \cdot \Omega \cdot i + \alpha \cdot \beta \cdot i + 1] \cdot \eta}{(1 - \alpha) \cdot (1 + \Omega \cdot i) \cdot L},$$

que corresponde a uma trajetória de equilíbrio dinâmico (*Balanced Growth Path*) no sentido usual, como definido por (5.14), caracterizada por uma taxa de crescimento endógena positiva e constante. Para uma taxa de juro nominal constante, a análise de estabilidade passa, uma vez mais, por averiguar se  $\phi$  é positivo ou negativo. Pode-se mostrar, novamente, pelo Teorema da Estabilidade Local, que  $c^*$  é estável se  $\phi > 0$ , que é equivalente a

$$\frac{r^*}{\theta} - \left[ \frac{1 + \Omega \cdot i + \beta \cdot i + \Omega \cdot \beta \cdot i^2}{1 + \Omega \cdot i + \alpha \cdot \beta \cdot i - \alpha \cdot \Omega \cdot i} \right] \frac{r^*}{\alpha} > \frac{\rho}{\theta}.$$

Pela condição de convergência do integral em (4.1), tal implica

$$\begin{aligned} \frac{r^*}{\theta} - \left[ \frac{1 + \Omega \cdot i + \beta \cdot i + \Omega \cdot \beta \cdot i^2}{1 + \Omega \cdot i + \alpha \cdot \beta \cdot i - \alpha \cdot \Omega \cdot i} \right] \cdot \frac{r^*}{\alpha} > \frac{\rho}{\theta} > \left( \frac{1 - \theta}{\theta} \right) \cdot r &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[ \frac{1 + \Omega \cdot i + \beta \cdot i + \Omega \cdot \beta \cdot i^2}{1 + \Omega \cdot i + \alpha \cdot \beta \cdot i - \alpha \cdot \Omega \cdot i} \right] \cdot \frac{1}{\alpha} < 1, \end{aligned}$$

que, considerando os valores admitidos para os parâmetros estruturais tecnológicos do modelo e o limite inferior da taxa de juro nominal ( $i = 0$ ), nunca ocorre. Assim, concluímos que o ponto de equilíbrio interior é instável, com  $c^* > 0$ , exigindo que os agentes se coloquem, para todo o  $t$ , sobre o *Balanced Growth Path*, de forma a que as condições de otimalidade não sejam violadas (mantendo-se assim as conclusões relativas à dinâmica de transição do modelo anterior).

Facilmente se observa, pela eq. (5.13), que a taxa de crescimento de equilíbrio continua a variar negativamente com a taxa de juro nominal. Este era um resultado expetável face à complementaridade entre a acumulação de capital físico e o processo de inovação que, em última instância, determina o crescimento económico de longo prazo. Um aumento da taxa de juro nominal desincentiva não só as atividades levadas a cabo no setor I&D, como também restringe, adicionalmente, a acumulação de capital físico. Este resultado contrasta com o apontado pelo modelo de Chu e Cozzi (2014) (desenvolvido no contexto de uma especificação *knowledge-driven* e sem capital físico), em que o efeito da taxa de juro nominal sobre o crescimento de longo prazo depende da magnitude relativa das restrições CIA no setor de I&D e no setor da produção. Com efeito, em Chu e Cozzi (2014), é possível, em termos teóricos, que um aumento da taxa de juro nominal tenha um impacto positivo sobre o crescimento de longo prazo, desde que a força da restrição CIA (medido por  $\Omega$  no nosso modelo) no setor da produção seja superior à da restrição

CIA (medido por  $\beta$  no presente modelo) no setor de I&D.<sup>35</sup> Como estes autores, no seu modelo, adotam uma especificação *knowledge-driven*, o *input* utilizado no setor de I&D é o fator trabalho, que pode ser usado, de forma alternativa, no setor da produção. Ainda que um aumento da taxa de juro nominal provoque um aumento do custo nos dois setores, a variação do custo relativo depende da magnitude da restrição CIA em cada setor. Se  $\Omega > \beta$  (no contexto do modelo apresentado por Chu e Cozzi, 2014), um aumento da taxa de juro nominal será mais oneroso para o setor da produção, originando uma diminuição da rentabilidade deste setor relativamente ao setor de I&D, com a consequente reafetação de recursos entre os dois setores. Esta realocação de recursos, potenciada por um aumento da atratividade relativa do setor de inovação, favorece as atividades de I&D que, em última análise, são o motor do crescimento económico de longo prazo. De forma diferente, no modelo que apresentámos, o efeito de  $i$  sobre  $g^*$  é independente (relativamente ao sentido do mesmo) da magnitude das restrições CIA ( $\beta$  e  $\Omega$ ). Este resultado não pode ser dissociado da configuração teórica adotada para o nosso modelo. De facto, como consideramos uma especificação *lab-equipment* do I&D, o capital físico, sendo um *input* do setor das atividades de inovação, é uma componente imprescindível do processo de desenvolvimento. Uma variação positiva da taxa de juro nominal desincentiva, por via da restrição de liquidez, a acumulação de capital físico que, dada a estreita relação com as atividades de I&D, tem um impacto negativo sobre a taxa de crescimento económico de longo prazo.

Uma vez que, nesta versão do modelo, a restrição de liquidez afeta a taxa de crescimento de equilíbrio por duas vias, será de esperar que esta exiba uma maior sensibilidade a variações da taxa de juro. À semelhança do que aconteceu nos capítulos anteriores, podemos recorrer a um pequeno exemplo numérico para calcular a elasticidade de  $g^*$ , dado pela eq. (5.13), face a  $i$ , e verificar se, tal como é exetável, a inclusão da restrição de liquidez nos bens de capital provoca um aumento da sensibilidade da taxa de crescimento de longo prazo relativamente a variações da taxa de juro nominal. Nesta versão do modelo, a expressão da elasticidade vem, depois de alguns passos, dada por

$$E = \left\{ \left( g^* + \frac{\rho}{\theta} \right) \cdot \left[ \frac{(\alpha - 1) \cdot \beta}{1 + \beta \cdot i} - \frac{\alpha \cdot \Omega}{1 + \Omega \cdot i} \right] \right\} \cdot \frac{i}{g^*}$$

Considera-se, identicamente ao capítulo anterior,  $\rho = 0.02$ ,  $\theta = 1.5$ ,  $\alpha = 1/3$ ,  $g^* = 0.02$ ,  $i = 0.075$ . Relativamente às restrições CIA, admitimos o caso extremo em que a totalidade do custo de I&D e de capital são financiados com recurso a empréstimos, isto é,  $\beta = 1$  e  $\Omega = 1$ . Para os valores considerados, temos  $E = -0.116$ , que é, em valor ab-

<sup>35</sup>Chu e Cozzi (2014) concluem que a magnitude da restrição de liquidez é superior no setor de I&D, uma vez que se observa, empiricamente, uma relação negativa entre a taxa de juro nominal e crescimento da produtividade. O nosso modelo não permite uma conclusão semelhante, na medida em que o sentido do impacto não depende de  $\beta$  e  $\Omega$ .

soluta, tal como era previsto, superior ao caso estudado no Capítulo 2. Não obstante, o valor obtido continua a revelar inelasticidade da taxa de crescimento face à taxa de juro nominal. Adicionalmente, podemos considerar, como argumentam Chu e Cozzi (2014), que a magnitude da restrição CIA é superior no setor de I&D. Se, por exemplo,  $\Omega = 0.5$ , vem  $E = -0.098$ , um valor mais próximo do estimado para o caso em que a restrição de liquidez apenas incidia sobre as atividades de inovação. Contudo, não podemos ignorar as conclusões de estudos empíricos recentes (ver Secção 3.5), que apontam para um aumento gradual, nos últimos anos, da proporção do capital no rendimento. Admitindo, alternativamente,  $\alpha = 0.45$ , vem  $E = -0.116$  no cenário em que  $\Omega = 1$  e  $E = -0.091$  quando  $\Omega = 0.5$ .

Este breve exemplo permite-nos concluir que, tal como era esperado, a introdução de uma restrição CIA no setor de bens intermédios, na medida em que impõe um custo adicional à acumulação de capital, eleva a sensibilidade da taxa de crescimento de equilíbrio face a variações da taxa de juro nominal. Por outro lado, o aumento reportado da proporção do capital no rendimento provoca uma diminuição, em termos absolutos, da elasticidade de  $g^*$  face a  $i$ , desde que a magnitude da restrição CIA no setor de I&D ( $\beta$ ) seja superior à magnitude da restrição CIA no setor da produção ( $\Omega$ ).<sup>36</sup> Desta forma, de acordo com o nosso modelo, se nos basearmos nas conclusões de Chu e Cozzi (2014), que inferem que a magnitude da restrição CIA é superior nas atividades de inovação, uma tendência no sentido do aumento da proporção do capital no rendimento seria acompanhada por uma redução gradual da sensibilidade da taxa de crescimento à taxa de juro nominal.<sup>37</sup> Contudo, fica também claro que a redução da elasticidade mediante um aumento de  $\alpha$  será, neste cenário, bastante menos intensa que no cenário com  $\Omega = 0$  (analisado no Capítulo 2).

Para tornar mais fácil a comparação entre os resultados obtidos neste capítulo e no capítulo anterior, apresentamos, seguidamente, a Tabela resumo 5.1, que contém os valores da elasticidade da taxa de crescimento do produto de longo prazo face à taxa de juro nominal, admitindo cenários alternativos no que diz respeito aos valores da proporção do capital no rendimento (dada pelo parâmetro  $\alpha$ ) e da magnitude das restrições CIA (medida pelos parâmetros  $\beta$  e  $\Omega$ ). Note-se que os valores considerados para a taxa de crescimento do produto de BGP, a taxa de juro nominal, a taxa de desconto subjetiva e o inverso da elasticidade intertemporal de substituição no consumo permanecem inalterados nos diversos cenários, não sendo por isso apresentados na tabela (relembramos que,

<sup>36</sup>Caso  $\beta = \Omega$ , o aumento de  $\alpha$  não tem impacto sobre a elasticidade de  $g^*$  face a  $i$ .

<sup>37</sup>Note-se que esta conclusão depende crucialmente da magnitude relativa das restrições CIA. Repare-se no cenário alternativo, presente na tabela 5.1, em que  $\beta = 0.5$  e  $\Omega = 1$ . Neste caso, viria  $E = -0.079$  quando  $\alpha = 1/3$  e  $E = -0.086$  quando  $\alpha = 0.45$ , ou seja, a elasticidade de  $g^*$  face a  $i$  aumentaria em termos absolutos.

no âmbito da análise quantitativa aqui desenvolvida,  $g^* = 0.02$ ,  $i = 0.075$ ,  $\rho = 0.02$  e  $\theta = 1.5$ ).

$\alpha$	$\beta$	$\Omega$	$E$
1/3	1	0	-0.078
	1	1	-0.116
	1	0.5	-0.098
	0.5	1	-0.079
0.45	1	0	-0.064
	1	1	-0.116
	1	0.5	-0.091
	0.5	1	-0.086

**Tabela 5.1:** Análise Quantitativa: Elasticidade de  $g^*$  face a  $i$

No que diz respeito à análise de bem-estar social, a expressão da utilidade é dada, tal como no capítulo anterior, por

$$U = -\frac{1}{(1-\theta) \cdot [(1-\theta) \cdot g^* - \rho]} - \frac{1}{\rho \cdot (1-\theta)},$$

em que a expressão de  $g^*$  vem, neste caso, da eq. (5.13). Pela derivada da função composta, temos

$$\frac{\partial U}{\partial i} = \frac{\partial g^* / \partial i}{[(1-\theta) \cdot g^* - \rho]^2},$$

onde

$$\frac{\partial g^*}{\partial i} = \left(g^* + \frac{\rho}{\theta}\right) \cdot \left[\frac{(\alpha-1) \cdot \beta}{1+\beta \cdot i} - \frac{\alpha \cdot \Omega}{1+\Omega \cdot i}\right].$$

Mostra-se que o denominador da expressão apresentada é sempre positivo (ver nota de rodapé 21) e que, atendendo aos valores admitidos para os parâmetros estruturais do modelo,  $\partial g^* / \partial i < 0$ . Como  $\partial U / \partial i < 0$ , impondo  $i \geq 0$ , concluímos que a utilidade é máxima quando a taxa de juro nominal é igual a zero, tal significando que a regra de Friedman é, uma vez mais, ótima, não sendo afetada pela consideração de uma restrição de liquidez no setor da produção.



## 6 Modelo de crescimento endógeno com I&D vertical, acumulação de capital físico e restrição CIA no consumo e atividades de I&D

A exposição que se segue baseia-se em Gil et al. (2017), adaptado ao contexto de um modelo com inovação vertical e com procura de moeda que, uma vez mais, se manifesta através da introdução de uma restrição CIA no consumo e nas atividades de I&D. Não são apresentadas as secções relativas às Famílias e à Autoridade Monetária, já que o seu conteúdo é idêntico ao exposto no Capítulo 4.

Até este ponto, assumiu-se que as atividades desenvolvidas no setor de I&D consistiam na criação de novos bens intermédios, estando o conceito de inovação intrinsecamente ligado à expansão de variedades destes bens. Neste capítulo, procuramos analisar os efeitos da política monetária sobre as atividades de I&D e, por extensão, sobre o crescimento de longo prazo, admitindo, contudo, que o esforço levado a cabo pelos empreendedores se destina à melhoria da qualidade dos bens existentes. Tal implica considerar que todos os tipos de bens intermédios foram descobertos no passado (Barro e Sala-i-Martin, 2004, cap. 7), ou seja, que  $N$  está fixo.

O I&D vertical aumenta a qualidade do bem num mercado existente, indexada por  $j(\omega)$ , traduzindo-se numa melhoria da produtividade do bem  $\omega$  (utilizado pelos produtores de bens finais),  $\lambda^{j(\omega)}$ , em que  $\lambda > 1$  é um parâmetro que mede o “salto” de qualidade. O processo de inovação acarreta um efeito de “destruição criativa”, já que a melhoria da qualidade dos bens existentes leva à exclusão do mercado dos monopolistas incumbentes. Desta forma, ainda que o direito de monopólio sobre uma invenção seja perpétuo (Barro e Sala-i-Martin, 2004, cap. 7), a renda obtida com essa inovação não o é, dependendo o seu valor esperado da probabilidade de ocorrência da próxima melhoria de qualidade realizada por um concorrente (empresa entrante no mercado).

### 6.1 Decisão de produção e preços

A empresa que produz o bem final utiliza uma tecnologia com rendimentos constantes à escala, usando trabalho e um contínuo de bens intermédios com medida  $N$ ,<sup>38</sup>

$$Y(t) = A \cdot L^{1-\alpha} \int_0^N \left[ \lambda^{j(\omega,t)} \cdot X(\omega,t) \right]^\alpha d\omega, 0 < \alpha < 1, \quad (6.1)$$

<sup>38</sup>Recorde-se que, não existindo inovação horizontal,  $N$  já não varia ao longo do tempo.

onde  $A > 0$  é a componente exógena da produtividade total dos fatores,  $L$  é o fator trabalho (que, uma vez mais, se assumirá como estando constante no tempo),  $1 - \alpha$  é a proporção do trabalho na produção e  $\lambda^{j(\omega,t)} \cdot X(\omega,t)$  é o *input* do bem intermédio  $\omega$ , medido em unidades eficientes, no momento  $t$ .

Os produtores de bens finais são *price-takers*, admitindo como dados os salários  $w(t)$  e o preço dos inputs  $p(\omega,t)$ , vendendo o seu produto a um preço também tomado como dado. Todos os preços e salários estão normalizados pelo preço do bem final (tratam-se, assim, de preços e salários reais). Das condições de maximização do lucro, a procura agregada do bem intermédio  $\omega$  é dada por

$$X(\omega,t) = L \cdot \left( \frac{A \cdot \lambda^{j(\omega,t)\alpha} \cdot \alpha}{p(\omega,t)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \omega \in [0, N]. \quad (6.2)$$

O bem intermédio é não durável e é produzido utilizando capital, de acordo com a função de produção

$$X(\omega,t) = K(\omega,t) \quad (6.3)$$

onde  $K(\omega,t)$  é o input do capital no setor  $\omega$ . O bem intermédio é produzido com uma função custo  $r(t) \cdot K(\omega,t) = r(t) \cdot X(\omega,t)$ , onde o custo do capital é a taxa de juro real de equilíbrio,  $r(t)$ . O setor de bens intermédios consiste num contínuo  $N$  de indústrias. Existe concorrência monopolística se considerarmos o setor como um todo: o monopolista na indústria  $\omega$  fixa o preço  $p(\omega,t)$ , mas enfrenta a curva da procura isoelástica (6.2). O lucro na indústria  $\omega$  é dado por  $\Pi(\omega,t) = (p(\omega,t) - r(t)) \cdot X(\omega,t)$ . O preço que maximiza o lucro é uma *markup* sobre o custo marginal

$$p(\omega,t) \equiv p(t) = \frac{r(t)}{\alpha} > 1, \quad (6.4)$$

que é constante entre indústrias, mas possivelmente variável ao longo do tempo. A qualidade do bem intermédio  $\omega$  pode ser caracterizada pelo índice de qualidade

$$q(\omega,t) = \lambda^{j(\omega,t)\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (6.5)$$

A partir de (6.2) e (6.4), a quantidade agregada produzida de  $\omega$  é

$$X(\omega,t) = L \cdot \left( \frac{A \cdot \alpha^2}{r(t)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot q(\omega,t) \quad (6.6)$$

Por outro lado, o equilíbrio no mercado de capital implica que

$$K(t) = \int_0^N K(\omega,t) d\omega = \int_0^N X(\omega,t) d\omega = \tilde{X}(t) \cdot Q(t), \quad (6.7)$$

com  $\tilde{X}(t) = L \cdot \left( \frac{A \cdot \alpha^2}{r(t)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$  e

$$Q(t) = \int_0^N q(\omega, t) d\omega, \quad (6.8)$$

que é o índice de qualidade agregado.  $Q(t)$  mede o nível de conhecimento tecnológico da economia uma vez que, por pressuposto, não existem *spillovers* entre setores.<sup>39</sup> Dado (6.3), a quantidade produzida do bem  $\omega$  pode ser expressa por

$$X(\omega, t) = \tilde{X}(t) \cdot q(\omega, t) = \frac{K(t)}{Q(t)} \cdot q(\omega, t). \quad (6.9)$$

Juntando (6.6) e (6.9), temos

$$r(t) = A \cdot \alpha^2 \cdot k(t)^{\alpha-1}, \quad (6.10)$$

onde  $k \equiv K/(QL)$ . Esta equação expressa a condição de que o custo do capital tem de igualar a sua produtividade marginal, ajustada pelo efeito da *markup*,  $1/\alpha$ .

Usando (6.9) e (6.10), chegamos ao lucro ótimo do monopolista em  $\omega$

$$\Pi(\omega, t) = \Pi_0 \cdot L \cdot k(t)^\alpha \cdot q(\omega, t), \quad (6.11)$$

em que  $\Pi_0 = A\alpha(1-\alpha)$  é uma constante positiva. Substituindo (6.9) em (6.1), vem

$$Y(t) = A \cdot L \cdot Q(t) \cdot k(t)^\alpha. \quad (6.12)$$

Utilizando (6.9), determinamos também os recursos totais dedicados à produção de bens intermédios,

$$X(t) = \int_0^N X(\omega, t) d\omega = k(t) \cdot L \cdot Q(t) = K(t), \quad (6.13)$$

e os lucros totais,

$$\Pi^T(t) = \int_0^N \Pi(\omega, t) d\omega = \Pi_0 \cdot L \cdot k(t)^\alpha \cdot Q(t). \quad (6.14)$$

## 6.2 I&D e Comportamento do Índice de Qualidade Agregado

Tal como acontecia nos capítulos anteriores, apenas se considera um setor de I&D. No entanto, o esforço dos inovadores é, nesta versão do modelo, dedicado à melhoria da qualidade de bens existentes. Uma vez que se assume, à semelhança do que sucedia na

<sup>39</sup>Esta configuração contrasta com a admitida por Howitt e Aghion (1998), em que a tecnologia de “ponta” está disponível para qualquer inovador, sendo independente do setor.

versão de base do modelo, que o I&D é realizado por potenciais entrantes, a inovação, quando é bem sucedida, leva à criação de uma nova empresa, sendo que, agora, essa nova firma estabelece a sua atividade num mercado existente.<sup>40</sup> Existe concorrência perfeita entre entrantes e entrada livre no setor de I&D.

Seja  $j(\omega, t)$  o nível de qualidade mais elevado do bem intermédio  $\omega$  no momento  $t$ . A um inovador bem sucedido é concedida uma patente sobre o uso do seu bem, permitindo-lhe obter lucros monopolistas que advêm do direito de venda exclusivo do bem de qualidade  $j(\omega, t) + 1$  aos produtores de bens finais. Uma inovação eleva instantaneamente o índice de qualidade em  $\omega$  de  $q(\omega, t) = q(j)$  para  $q^+(\omega, t) = q(j+1) = \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot q(\omega, t)$ , sendo que, em equilíbrio, qualidades inferiores de  $\omega$  são excluídas do mercado. Admite-se, no contexto deste modelo, que a taxa de chegada de inovações verticais pelo potencial entrante  $i$  no mercado  $\omega$  quando a qualidade mais avançada é  $j$ ,  $I_i(j)$ , segue um processo Poisson, sendo independentemente distribuída entre empresas, mercados e ao longo do tempo e dependendo positivamente dos recursos  $R_{vi}(j)$  dedicados pelos entrantes no momento  $t$ . Assim,  $I_i(j) = R_{vi}(j) \cdot \Phi(j)$ , em que

$$\Phi(j, \omega, t) = \frac{1}{\zeta \cdot L \cdot q(j+1)} \quad (6.15)$$

é o fator de produtividade do I&D, que se assume constante entre potenciais entrantes, onde  $\zeta > 0$  é o custo fixo (fluxo) do I&D vertical. Está também implícito, pela eq. (6.15), que a probabilidade de sucesso de uma inovação vertical diminui com a dimensão da economia, permitindo diluir o efeito de escala do I&D, e com o índice de qualidade, que traduz a dificuldade crescente de criar qualidades novas (superiores) do bem intermédio. Agregando entre  $i$  em  $\omega$ , vem  $R_v(j) = \sum_i R_{vi}$  e  $I(j) = \sum_i I_i(j)$  e, por isso,

$$I(j) = R_v(j) \cdot \frac{1}{\zeta \cdot L \cdot \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot q(\omega, t)}. \quad (6.16)$$

O valor presente esperado de uma empresa incumbente quando o nível atual de qualidade é  $j(\omega, t)$ ,  $V(j)$ , é dado por

$$V(j) = \Pi_0 \cdot L \cdot q(j) \int_t^\infty k(t)^\alpha \cdot e^{-\int_t^s (r(v) + I(j)) dv} ds, \quad (6.17)$$

onde  $r$  é a taxa de juro real de equilíbrio. Observa-se que, nesta versão do modelo, o valor esperado dos lucros intertemporais é atualizado não só por  $r$ , mas também por  $I$ , que representa a probabilidade de “morte” do incumbente (i.e., a concretização de uma melhoria de qualidade). Recordando que o custo do I&D tem uma componente operacional e uma componente financeira, a condição de entrada livre neste setor é  $I(j) \cdot V(j+1) =$

<sup>40</sup>Quando o I&D consistia na expansão de variedades de bens intermédios, uma inovação bem sucedida conduzia não só à criação de uma nova firma, como também de um novo mercado.

$(1 - \beta) \cdot R_v(j) + \beta \cdot (1 + i) \cdot R_v(j) = (1 + \beta \cdot i) \cdot R_v$ , em que  $\beta$  é a fração do investimento em I&D financiado com recurso a empréstimos das famílias. Usando (6.16), vem

$$V(j+1) = (1 + \beta \cdot i) \cdot \zeta \cdot L \cdot \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot q(\omega, t). \quad (6.18)$$

Dado que a acumulação de capital e o investimento em I&D representam ambas alternativas ao consumo, a taxa de retorno das atividades de I&D tem de ser igual à taxa de retorno do capital,  $r$ . Considerando também que o valor esperado da inovação é condicionado pela chegada da próxima melhoria de qualidade realizada por um entrante, à taxa  $I(\omega, t)$ , a condição de não-arbitragem que um inovador vertical enfrenta é dada por

$$r(t) + I(t) = \frac{\Pi_0 \cdot k(t)^\alpha}{(1 + \beta \cdot i) \cdot \zeta}, \quad (6.19)$$

que é semelhante à obtida em Gil et al. (2017), sendo todavia alterada por força da inclusão da restrição CIA nas atividades de I&D.<sup>41</sup> A equação (6.19) implica que a taxa de entrada é simétrica entre mercados, ou seja,  $I(\omega, t) = I(t)$ .

Utilizando (6.16), notando que  $R_v(\omega, t) = R_v(j)$  e agregando entre mercados  $\omega$ , determinamos os recursos totais dedicados ao I&D vertical,  $R_v(t) = \int_0^N R_v(\omega, t) d\omega = \int_0^N \zeta \cdot L \cdot \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot q(\omega, t) \cdot I(\omega, t) d\omega$ , que é equivalente a

$$R_v(t) = \zeta \cdot L \cdot \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot I(t) \cdot Q(t), \quad (6.20)$$

uma vez que a taxa de chegada de inovações é independente do mercado.

Um “salto na escada de qualidade” ocorre num mercado quando uma inovação é bem sucedida, ou seja, quando o índice de qualidade passa de  $q(\omega, t)$  para  $q^+(\omega, t) = \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot q(\omega, t)$ , com probabilidade  $I(\omega, t)$ . Então, em termos agregados, e dado o contínuo de indústrias de bens intermédios em  $[0, N]$ , essa variação pode ser traduzida por  $\dot{Q}(t) = \int_0^N I(\omega, t) \cdot \left[ \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot q(\omega, t) - q(\omega, t) \right]$ , que, dada a simetria da taxa de chegada de inovações entre indústrias, é igual a

$$\dot{Q}(t) = I(t) \cdot \Xi \cdot Q(t), \quad (6.21)$$

onde  $\Xi = \left( \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1 \right)$  representa o “salto de qualidade”.

<sup>41</sup> A relação expressa no lado direito de (6.19) é equivalente a  $\Pi(j+1)/V(j+1)$ .

### 6.3 Agregação Macroeconómica e Taxas de Acumulação de Capital Físico e de Inovação de Equilíbrio

A riqueza financeira agregada das famílias é  $a(t) = K(t) + \int_0^N V(\omega, t) d\omega$ , sendo equivalente, por (6.18),<sup>42</sup> a

$$a(t) = K(t) + (1 + \beta \cdot i) \cdot \zeta \cdot L \cdot Q(t). \quad (6.22)$$

Por conseguinte, a riqueza agregada varia, ao longo do tempo, de acordo com

$$\dot{a}(t) = \dot{K}(t) + (1 + \beta \cdot i) \cdot \zeta \cdot L \cdot \dot{Q}(t). \quad (6.23)$$

Utilizando (4.2) e (6.21), notando que  $\tau(t) = \dot{m}(t) + \pi(t) \cdot m(t)$  e dado que da maximização do lucro em relação ao trabalho resulta  $w = (1 - \alpha) \cdot (Y/L)$ , vem

$$\left( K + \int_0^N V(\omega, t) d\omega \right) \cdot r + (1 - \alpha) \cdot Y - C + i \cdot b = \dot{K} + (1 + \beta \cdot i) \cdot \zeta \cdot L \cdot I \cdot \Xi \cdot Q.$$

Recorde-se (6.10), (6.12), (6.14), (6.19) (de modo a ter  $r \cdot K = \alpha^2 \cdot Y$  e  $r \cdot \int_0^N V(\omega, t) d\omega = \Pi^T - I \cdot \int_0^N V(\omega, t) d\omega = \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot Y - (1 + \beta \cdot i) \cdot \zeta \cdot L \cdot I \cdot Q$ )<sup>43</sup> e  $\Xi = \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1$ . Notando também que, nesta versão do modelo, o montante de empréstimos em termos agregados,  $b$ , é dado por  $b = \beta \cdot \zeta \cdot L \cdot \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot I \cdot Q$  e que  $\zeta \cdot L \cdot \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot I \cdot Q = R_v$ , obtemos

$$Y(t) = \dot{K}(t) + C(t) + R_v(t), \quad (6.24)$$

que é a restrição orçamental agregada e a condição de equilíbrio no mercado de bem final. Resolvendo em ordem a  $\dot{K}(t)$  e substituindo  $Y(t)$  e  $R_v(t)$ , respetivamente, pelas expressões em (6.12) e (6.20), obtemos a taxa de acumulação de capital físico endógena

$$\dot{K}(t) = L \cdot Q(t) \cdot \left( A \cdot k^\alpha - \frac{C(t)}{L \cdot Q(t)} - \zeta \cdot \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot I(t) \right). \quad (6.25)$$

Por outro lado, relembre-se (6.10) e (6.19) de forma a ter  $r(t) = r(Q, K)$  e, por essa via, chegar à expressão da taxa de inovação vertical endógena,

$$I(Q, K) = \max \left\{ \frac{\Pi_0 \cdot k(t)^\alpha}{(1 + \beta \cdot i) \cdot \zeta} - r(Q, K), 0 \right\}, \quad (6.26)$$

<sup>42</sup>Note-se que, como  $V(j) = V(\omega, t)$ , para chegarmos ao valor agregado das firmas de I&D, a condição de entrada livre deve ser resolvida para  $V(j)$  e agregada entre  $\omega$ .

<sup>43</sup>A condição de não-arbitragem mantém-se em termos agregados, o que implica, por (6.19),  $r(t) + I(t) = \frac{\Pi^T(t)}{\int_0^N V(\omega, t) d\omega}$ .

que aumenta com o *stock* de capital físico, evidenciando a complementaridade entre inovação vertical e acumulação de capital, e diminui com o nível de qualidade agregado.

## 6.4 Equilíbrio Geral Dinâmico

Para garantir a existência de um equilíbrio geral dinâmico, é necessário que: (i) as famílias e as empresas de bens finais e intermédios resolvam os seus problemas de otimização, de forma a maximizarem a utilidade e o lucro; (ii) a condição de entrada livre no setor de I&D seja satisfeita; e (iii) os mercados estejam em equilíbrio. O sistema dinâmico que descreve a economia pode ser obtido, para  $I(Q, K) > 0$ , a partir das equações (4.3), (6.21) e (6.25), sendo composto por

$$\dot{C} = \left[ \frac{1}{\theta} \cdot (r(Q, K) - \rho) \right] \cdot C \quad (6.27)$$

$$\dot{Q} = I(Q, K) \cdot \Xi \cdot Q \quad (6.28)$$

$$\dot{K} = L \cdot Q \cdot \left( A \cdot k^\alpha - \frac{C}{L \cdot Q} - \zeta \cdot \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot I(Q, K) \right) \quad (6.29)$$

e pela condição de transversalidade (4.4), que, nesta versão do modelo, pode ser escrita como

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\rho t} \cdot C(t)^{-\theta}}{1 + \xi \cdot i(t)} \cdot (K(t) + (1 + \beta \cdot i) \cdot \zeta \cdot L \cdot Q(t)) = 0. \quad (6.30)$$

### 6.4.1 Balanced Growth Path

Por (6.24) e (6.20), temos  $Y(t) = \dot{K}(t) + C(t) + \zeta \cdot L \cdot \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot I(t) \cdot Q(t) \Leftrightarrow 1 = \frac{\dot{K}(t)}{Y(t)} + \frac{C(t)}{Y(t)} + \frac{\zeta \cdot L \cdot \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot I(t) \cdot Q(t)}{Y(t)}$ . No equilíbrio de longo prazo, para termos uma trajetória sustentada (BGP), é necessário que se verifique a seguinte condição para as taxas de crescimento das variáveis

$$g_Y^* = g_C^* = g_K^* = g_Q^* = g_m^* = g^* = \frac{1}{\theta} \cdot (r^* - \rho) = I^* \cdot \Xi, \quad (6.31)$$

onde o último termo vem da eq. (6.27), e que a taxa de inovação vertical,  $I(t)$ , e a taxa de juro real,  $r(t)$ , não exibam tendência, i.e.,  $g_I = g_r = 0$ . Definindo  $c(t) = C(t) / (L \cdot Q(t))$

e  $k(t) = K(t)/(L \cdot Q(t))$ , com a propriedade de que, ao longo do BGP,  $\dot{c}(t) = \dot{k}(t) = 0$ , o sistema (6.27)-(6.29) é equivalente a

$$\dot{c}(t) = \left[ \frac{1}{\theta} \cdot (r(k(t)) - \rho) - I(k(t)) \cdot \Xi \right] \cdot c(t) \quad (6.32)$$

$$\dot{k}(t) = \left[ \frac{A \cdot k(t)^\alpha - c(t) - \zeta \cdot \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot I(k(t))}{k(t)} - I(k(t)) \cdot \Xi \right] \cdot k(t) \quad (6.33)$$

onde  $r(k) \equiv r(Q, K)$  e  $I(k) \equiv I(Q, K)$ . O sistema tem uma variável controlo,  $c(t)$ , e uma variável estado,  $k(t)$ , que representam, respetivamente, o consumo e o capital por *stock* de conhecimento. Os valores de *steady state* das variáveis,  $c^*$  e  $k^*$ , podem ser determinados estabelecendo  $\dot{c}(t) = \dot{k}(t) = 0$ . Desta forma, o valor de equilíbrio do consumo por *stock* de conhecimento vem da eq. (6.33), sendo expresso por

$$c^* = A \cdot (k^*)^\alpha - \left( \zeta \cdot \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + k^* \cdot \Xi \right) \cdot I(k^*). \quad (6.34)$$

Por seu turno, o valor de equilíbrio de  $k$  apenas pode ser determinado implicitamente, resultando da interseção das curvas  $g_C^*$  e  $g_Q^*$  que, utilizando (6.27), (6.28), (6.10) e (6.26), podem ser representadas, respetivamente, por

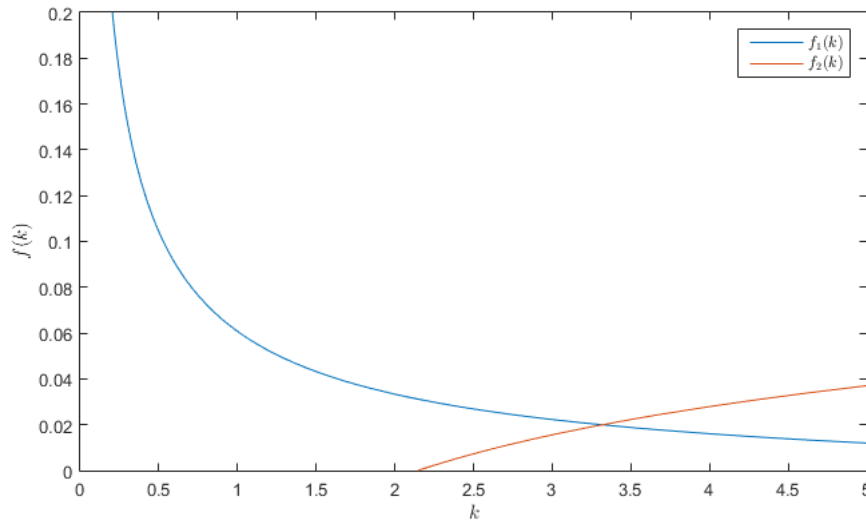
$$f_1(k) = \frac{1}{\theta} \cdot (A \cdot \alpha^2 \cdot k^{\alpha-1} - \rho) \quad (6.35)$$

$$f_2(k) = \Xi \cdot \left( \frac{\Pi_0 \cdot k^\alpha}{(1 + \beta \cdot i) \cdot \zeta} - A \cdot \alpha^2 \cdot k^{\alpha-1} \right). \quad (6.36)$$

Da resolução do sistema (6.35)-(6.36), resulta o valor de  $k^*$  (ver Figura 6.1) que, juntamente com  $c^*$  (proveniente da eq. (6.34)), define o *steady-state* da economia. Este ponto de equilíbrio corresponde a uma trajetória de equilíbrio dinâmico no sentido usual, caracterizada por uma taxa de crescimento endógena positiva e constante, como definido em (6.31).

Relativamente à análise de estática comparada, as curvas  $f_1(k)$  e  $f_2(k)$  indicam qual o comportamento de equilíbrio do capital físico por *stock* de conhecimento tecnológico em função dos parâmetros estruturais do modelo. Desta forma,  $k^*$  diminui com a dimensão da melhoria de qualidade, medida por  $\lambda$  (recordar que  $\Xi = \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1$ ), a taxa de desconto subjetiva,  $\rho$ , e o inverso da elasticidade intertemporal de substituição no consumo,  $\theta$ ; e aumenta com a proporção do capital na produção,  $\alpha$ , o custo fixo do I&D vertical,  $\zeta$ , a





**Figura 6.1:** *Steady-state* interior de  $k$  determinado pela interseção das curvas  $f_1(k)$  e  $f_2(k)$ . A título ilustrativo, o lugar geométrico de  $k^*$  foi obtido considerando  $\alpha = 1/3$ ,  $\theta = 1.5$ ,  $\rho = 0.02$ ,  $\lambda = 3$ ,  $\zeta = 3.99$ ,  $i = 0.075$  (ver Secção 4.5),  $A = 1$  e  $\beta = 1$ .

magnitude da restrição CIA,  $\beta$ , e a taxa de juro nominal,  $i$ . Assim, no que diz respeito ao nível de equilíbrio do capital por *stock* de conhecimento tecnológico, concluímos que a taxa de juro nominal atua no mesmo sentido que na versão do modelo com I&D horizontal. No *steady-state*, com  $k$  constante (e, por extensão,  $r$  constante), pela eq. (6.26), observa-se que um aumento da taxa de juro nominal tem um efeito negativo sobre a taxa de inovação. Como  $\pi = i - r$  (ver Secção 4.5), o nosso modelo prevê uma relação negativa entre inflação e I&D, que é consistente com os resultados da análise empírica realizada por Chu e Lai (2013) e Chu et al. (2015). Por outro lado, a taxa de crescimento do produto de BGP,  $g^* = (1/\theta) \cdot (r^* - \rho) = (1/\theta) \cdot [A \cdot \alpha^2 \cdot (k^*)^{\alpha-1} - \rho]$ , varia positivamente com  $\lambda$  e diminui com  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $\zeta$ ,  $\beta$  e  $i$ . Consequentemente, a condução da política monetária, que se materializa em alterações da taxa de juro nominal, produz efeitos sobre a taxa de crescimento de equilíbrio semelhantes aos dos capítulos anteriores. Note-se que, uma vez mais, o efeito de  $i$  sobre  $g^*$  é atenuado pelo parâmetro  $\alpha$ . Esta característica, já evidenciada no modelo de base, decorre da introdução de capital físico e dos rendimentos marginais decrescentes a si associados.

#### 6.4.2 Dinâmica de Transição

Em seguida, caracterizamos qualitativamente a dinâmica local na vizinhança do equilíbrio de longo prazo. Utilizando o Teorema de Grobman-Hartman, analisamos o comportamento das soluções do sistema linearizado obtido a partir de (6.32)-(6.33). A matriz Jacobiana, avaliada nos valores de *steady-state*  $(c^*, k^*)$ , é dada por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & J_{12} \\ -1 & J_{22} \end{pmatrix},$$

onde

$$J_{12} = B_0 \cdot \left[ \frac{1}{\theta} + \Xi \cdot \left( \frac{k^*}{(1 + \beta \cdot i) \cdot \zeta} + 1 \right) \right] \cdot (k^*)^{\alpha-2} \cdot c^* < 0,$$

$$J_{22} = B_1 \cdot (k^*)^\alpha + B_2 \cdot (k^*)^{\alpha-1} + B_3 \cdot (k^*)^{\alpha-2},$$

com

$$B_0 = A \cdot \alpha^2 \cdot (\alpha - 1);$$

$$B_1 = \frac{\Xi \cdot (\alpha + 1)}{\alpha \cdot (1 + \beta \cdot i) \cdot \zeta} \cdot B_0;$$

$$B_2 = A \cdot \alpha \cdot \left[ 1 + \Xi \cdot \alpha^2 - \frac{\alpha \cdot (1 - \alpha)}{1 + \beta \cdot i} \cdot \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right];$$

$$B_3 = \zeta \cdot \lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot B_0.$$

O traço e o determinante da matriz  $J$  são, respetivamente,  $tr(J) = J_{22}$  e  $det(J) = J_{12}$ . Os valores próprios da matriz Jacobiana são dados por

$$\mu_1, \mu_2 = \frac{tr(J) \pm \sqrt{(tr(J))^2 - 4 \cdot det(J)}}{2}.$$

Notando também que  $det(J) = \mu_1 \cdot \mu_2$ , é fácil verificar que os valores próprios são reais e têm sinal contrário, levando-nos a concluir que as soluções do sistema têm um comportamento monótono quando  $t \rightarrow +\infty$  e que o equilíbrio interior é um ponto de sela (*saddle path*). Desta forma, a dinâmica de transição deste modelo é caracterizada por uma trajetória *saddle path* estável e monótona, que depende da escolha de  $c(0)$  (que é a variável controlo) por parte das famílias.

A análise numérica que se segue pretende ilustrar a dinâmica de transição do nosso modelo e ajudar a compreender qual o comportamento das variáveis face a um choque exógeno que, dado o objetivo deste trabalho, consistirá numa variação da taxa de juro

nominal,  $i$  (apresentamos apenas o caso de um aumento de  $i$ ). Os valores atribuídos aos parâmetros estruturais do modelo não se alteram. Recorde-se que  $\rho = 0.02$ ,  $\theta = 1.5$ ,  $A = 1$ ,  $\alpha = 1/3$  e  $\beta = 1$ . O valor do parâmetro que mede a dimensão do “salto de qualidade”,  $\lambda$ , é igual a 3 (valor utilizado em Gil et al., 2017) e o custo fixo do I&D vertical,  $\zeta$ , é calibrado de forma a ser compatível com uma taxa de crescimento de BGP ( $g^*$ ) de 2%, tomando o valor de 3.99. Admite-se que a taxa de juro nominal é de 7.5% no cenário inicial, aumentando para 10% depois do choque. Estamos interessados em caracterizar o comportamento de  $c(t)$ ,  $k(t)$ ,  $r(t)$ ,  $I(t)$ ,  $g_Q(t)$  e  $g_Y(t)$  face a uma variação exógena de  $i$ , percebida como não antecipada e permanente pelos agentes económicos. Note-se que, a partir do sistema linearizado, obtemos a solução de  $k(t)$  e, por extensão, utilizando (6.10), (6.19) e (6.28), as soluções de  $r(t)$ ,  $I(t)$  e  $g_Q(t)$ . Por sua vez, a taxa de crescimento do produto,  $g_Y(t)$ , é igual, por (6.12), a  $g_Q(t) + \alpha \cdot g_k(t)$ .

Todavia, antes de analisarmos a evolução das variáveis mencionadas durante o período de transição, importa perceber qual o efeito de um aumento da taxa de juro nominal sobre as mesmas no BGP. A Tabela 6.1 resume os resultados obtidos para as variáveis de interesse e os valores próprios,  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , antes e depois do choque.

$i$	$c^*$	$k^*$	$r^*$	$I^*$	$g_Y^* = g_Q^*$	$\mu_1$	$\mu_2$
0.075	1.2364	3.3157	0.05	0.0273	0.02	0.1391	-0.1755
0.1	1.2505	3.3821	0.0493	0.0267	0.0195	0.1388	-0.1719

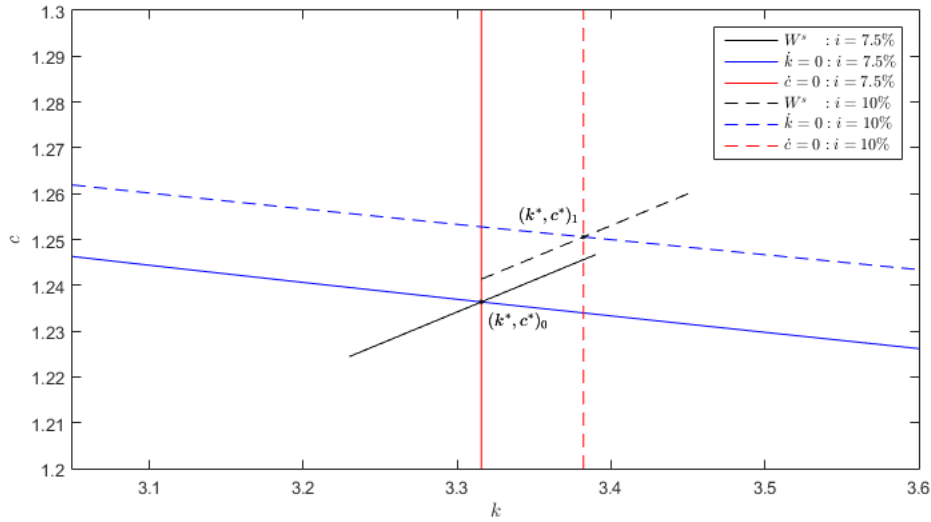
**Tabela 6.1:** Análise Quantitativa: efeitos de um aumento da taxa de juro nominal sobre as variáveis endógenas no BGP.

Tal como era esperado (ver Secção 6.4.1), um aumento da taxa de juro nominal tem um efeito positivo sobre a intensidade capitalística de equilíbrio da economia,  $k^*$ , impondo, por seu turno, uma diminuição da taxa de crescimento de BGP,  $g^*$ . Por outro lado, a velocidade de convergência assintótica, dada pelo valor próprio estável em valor absoluto (Gil et al., 2017), é relativamente elevada nos dois cenários.<sup>44</sup> Tal poderá justificar-se com a existência de um *feedback* positivo, durante a dinâmica de transição, entre a acumulação de capital físico e I&D vertical (com o efeito da I&D a sobrepôr-se ao efeito das produtividades marginais decrescentes do capital), que permite gerar velocidades de convergência relativamente elevadas. O facto de uma maior taxa de juro nominal conduzir a uma menor velocidade de convergência parece confirmar a existência desse mecanismo (subjacente à interação virtuosa entre capital e I&D), já que o aumento de  $i$ , na medida em que prejudica as atividades de I&D, “liberta” o canal das produtividades marginais decrescentes que, dessa forma, é responsável por refrear o ritmo a que a economia tende

<sup>44</sup>Gil et al. (2017) obtêm um valor de 0.0231, que está em linha com a evidência empírica. No entanto, o modelo destes autores admite inovação horizontal, que, em virtude dos custos de congestão a ela associados, produz um “abrandamento” da velocidade de convergência.

para o equilíbrio.

Focamo-nos agora na dinâmica de transição da variável estado,  $k(t)$ , e da variável controlo,  $c(t)$ . Com esse objetivo, apresentamos, na Figura 6.2, o diagrama de fase, onde projetamos o sistema linearizado no plano  $(k, c)$ . Admite-se que, no cenário inicial, a economia está numa situação de equilíbrio,  $(k^*, c^*)_0$ , caracterizada por uma taxa de juro nominal de 7.5%. O aumento de  $i$  para 10% desloca o *steady-state* para  $(k^*, c^*)_1$ .



**Figura 6.2:** Diagrama de fase no plano  $(k, c)$ : Aumento da taxa de juro nominal de 7.5% para 10%. A variação positiva de  $i$  provoca uma deslocação das isoclinas  $\dot{k} = 0$  e  $\dot{c} = 0$ . Como o equilíbrio é um ponto de sela, apenas representamos o subespaço próprio estável (linearizado), que corresponde à trajetória *saddle path* com comportamento monótono,  $W^s$ .

As soluções do sistema linearizado são do tipo

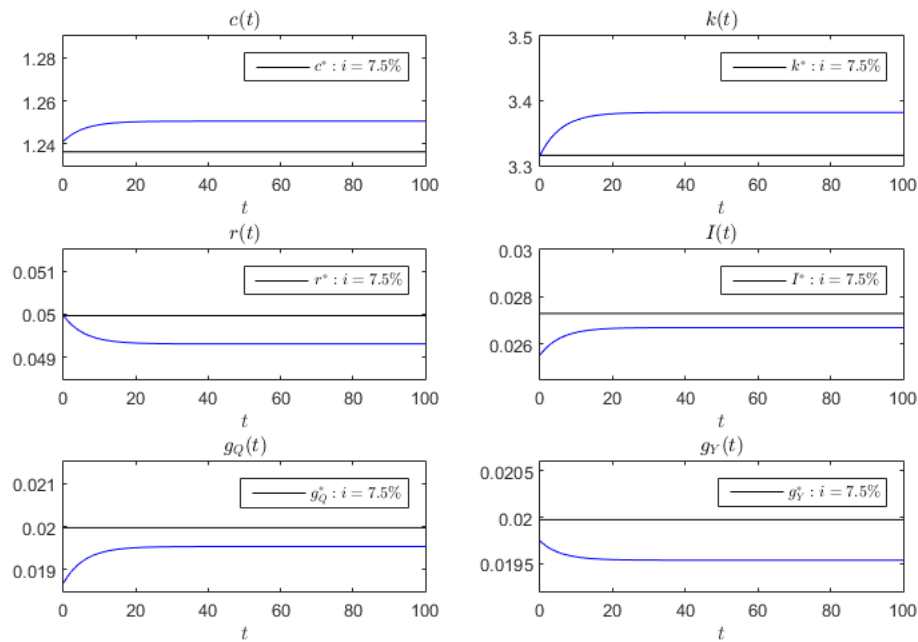
$$\begin{cases} c(t) = v_{1,1} \cdot C_1 \cdot e^{\mu_1 t} + v_{1,2} \cdot C_2 \cdot e^{\mu_2 t} + c^* \\ k(t) = v_{2,1} \cdot C_1 \cdot e^{\mu_1 t} + v_{2,2} \cdot C_2 \cdot e^{\mu_2 t} + k^* \end{cases},$$

onde  $\mu_j$ ,  $j = 1, 2$ , são os valores próprios,  $v_{i,j}$ ,  $i = 1, 2$ , é o  $i$ -ésimo elemento do vetor próprio associado a  $\mu_j$  e  $C_1$  e  $C_2$  são as constantes de integração, que dependem das condições iniciais  $c(0)$  e  $k(0)$ . Dado que a variável associada à instabilidade é  $c(t)$  (ver Tabela 6.1), as famílias, sendo perfeitamente racionais, escolhem  $c(0)$  de forma a posicionarem-se sobre a trajetória estável,  $W^s$ , o que implica anular  $C_1$  no sistema de soluções, que é a constante de integração associada ao valor próprio positivo,  $\mu_1$ . Como é sabido, tal corresponde a selecionar a única trajetória que cumpre a condição de transversalidade (6.30). Com o choque sobre a taxa de juro nominal, o equilíbrio desloca-se de  $(k^*, c^*)_0$  para  $(k^*, c^*)_1$ . Assim, o subespaço próprio estável linearizado, que representámos na Figura 6.2, é dado por

$$W^s = \left\{ (k(t), c(t)) : c(t) = \frac{v_{1,2}}{v_{2,2}} \cdot (k(t) - k_1^*) + c_1^* \right\},$$

cuja projeção no plano  $(k, c)$  descreve a trajetória *saddle-path* estável e monótona para o novo equilíbrio.

Para além da dinâmica de  $c(t)$  e  $k(t)$ , convém também perceber como evoluem as outras variáveis de interesse no período de transição, em resposta a um aumento da taxa de juro nominal. Na Figura 6.3 é apresentada a dinâmica de transição de  $c(t)$ ,  $k(t)$ ,  $r(t)$ ,  $I(t)$ ,  $g_Q(t)$  e  $g_Y(t)$ , que caracteriza o comportamento destas variáveis ao longo do tempo, face a um aumento exógeno de  $i$ .



**Figura 6.3:** Dinâmica de transição das variáveis endógenas  $c(t)$ ,  $k(t)$ ,  $r(t)$ ,  $I(t)$ ,  $g_Q(t)$  e  $g_Y(t)$  face a um aumento da taxa de juro nominal de 7.5% para 10%.

Observando a Figura 6.3, conseguimos entender de que forma o aumento da taxa de juro nominal afeta o comportamento da economia, aqui traduzido pelo andamento das variáveis endógenas relevantes.

No curto prazo (imediatamente após o choque), com  $k$  e  $r$  ainda inalterados, a subida da taxa de juro nominal,  $i$ , que se traduz num aumento do custo de I&D, induz uma queda da taxa de inovação vertical,  $I$ . Esta, por sua vez, provoca uma diminuição imediata de  $g_Q$  e  $g_Y$ .

No médio prazo (i.e., na dinâmica de transição), a intensidade capitalística,  $k$ , cresce à medida que ocorre, em termos relativos, uma maior afetação de recursos à acumulação de capital físico em detrimento das atividades de I&D. No entanto, tal conduz a uma

descida de  $r$  (uma vez que, com  $K$  relativamente mais abundante, o seu retorno marginal é menor) e, por esta via, em conjugação com a referida acumulação de capital físico  $k$ , a uma recuperação de  $I$  (a maior disponibilidade de capital físico compensa parcialmente o efeito negativo da subida da taxa de juro nominal no que diz respeito à rentabilidade de atividades de I&D). Com a recuperação de  $I$ , observa-se também uma recuperação de  $g_Q$ . Contudo, dado o predomínio do efeito dos rendimentos marginais decrescentes associados ao capital físico (que induzem uma acumulação de capital a ritmos decrescentes) face à recuperação de  $g_Q$ , acaba por se observar uma trajetória descendente de  $g_Y$  que reforça o movimento negativo de curto prazo.<sup>45</sup> Como resultado desta interação entre o canal de acumulação de capital físico e o canal de I&D, a dinâmica de transição é caracterizada por uma correlação negativa entre a intensidade de I&D (captada pela taxa de Poisson) e a taxa de crescimento do produto per capita, que é consistente com a evidência empírica que compara a dinâmica destas variáveis ao longo do tempo em vários países (Pintea e Thompson, 2007; Gil et al., 2013).

No longo prazo (novo SS/BGP),  $k$  fica permanente mais elevado e  $r$ ,  $I$ ,  $g_Q$  e  $g_Y$  ficam permanentemente mais baixos, refletindo a deslocação de recursos das atividades de I&D para a acumulação de capital físico em virtude da subida da taxa de juro nominal.

Resumindo, de acordo com este modelo, uma subida da taxa de juro nominal,  $i$ , tem efeitos diretos negativos sobre a taxa de crescimento tanto no curto como no longo prazo, a par de reduzir (um pouco) a velocidade de convergência, o que significa que induz um aumento da persistência, em termos de dinâmica de transição, dos efeitos de outros tipos de choques exógenos que possam afetar a economia.

---

<sup>45</sup>Este resultado contrasta com o previsto por Chu e Ji (2016). No seu modelo, um aumento da taxa de juro nominal reduz a taxa de crescimento durante o período de transição, mas não tem efeitos permanentes sobre a taxa de BGP.

## 7 Conclusões

Neste estudo, analisámos os efeitos da política monetária sobre o crescimento económico. Com esse objetivo, procurámos investigar quais as consequências da introdução de moeda (e da respetiva ação da autoridade monetária, na sua tentativa de a manipular), sob a forma de uma restrição CIA, num modelo de crescimento endógeno. Assim, desenvolvemos uma extensão do modelo Gil et al. (2017), sendo que a novidade do presente trabalho relativamente à demais literatura sobre o tema consiste na inclusão de esfera monetária num modelo baseado em atividades de I&D, sob uma especificação *lab-equipment*, e com acumulação de capital físico. Esta configuração permite estabelecer, como defendem Howitt e Aghion (1998), pressupostos mais realistas no âmbito da teoria do crescimento endógeno baseado em atividades de I&D.

De forma a simplificar a análise, adaptámos, numa primeira fase, o modelo de base a um contexto de um modelo apenas com I&D horizontal (em vez de I&D vertical e horizontal). O desenvolvimento do mesmo ainda sem esfera monetária permitiu-nos chegar a conclusões que contribuem para a literatura do crescimento endógeno. Primeiro, no âmbito de um modelo com acumulação de capital físico, mostrámos que a escolha entre inovação vertical e horizontal não é inócua, sendo que a primeira conduz a uma construção teórica que permite gerar dinâmica de transição (ex.: Howitt e Aghion, 1998), enquanto a última não (ex.: o modelo aqui apresentado). Esta diferença decorre de, no modelo com inovação vertical, a taxa de retorno das atividades de I&D ser aumentada pela taxa esperada de chegada de uma inovação (refletindo o "efeito de destruição criativa"). Esta taxa é endógena, dependendo da quantidade de recursos afetos às atividades de I&D. Decorre daqui que, refletindo a condição de não-arbitragem entre atividades de I&D e de acumulação de capital físico, estas últimas serão também função daqueles recursos, por sua vez condicionados pela dinâmica das restantes variáveis endógenas do modelo através da restrição orçamental agregada. Segundo, comparando o modelo aqui apresentado com o de Barro e Sala-i-Martin (2004, cap. 6) - modelo de I&D horizontal com especificação *lab-equipment* mas sem capital físico-, a introdução de capital físico manifesta-se na taxa de crescimento de BGP através da sua elasticidade na função produção agregada,  $\alpha$ , refletindo o mecanismo neoclássico de rendimentos marginais decrescentes associados àquele fator produtivo. Esta característica leva a que, tal como mostra o nosso exercício quantitativo, a elasticidade da taxa de crescimento de BGP face ao custo do I&D seja menor quando se inclui capital físico. Por último, fomos ao encontro das questões levantadas por Jones (1995a) e desenvolvemos um modelo sem efeitos de escala, admitindo duas medidas de escala distintas, nomeadamente o fator trabalho e o produto por linha de variedade. Ao considerar a segunda abordagem, como em Barro e Sala-i-Martin (2004, cap. 6), o

efeito dos rendimentos marginais decrescentes sobre a taxa de crescimento desaparece.

A introdução de procura de moeda nesta versão simplificada do modelo passou pela consideração de uma restrição CIA no consumo e nas atividades de I&D num primeiro momento,<sup>46</sup> para depois ser incluída também no setor da produção, à semelhança da abordagem de Chu e Cozzi (2014). No entanto, como já referido, o nosso modelo distingue-se do proposto por estes autores por admitir acumulação de capital físico e uma especificação *lab-equipment* das atividades de I&D.

Quando a restrição de liquidez incide apenas sobre o consumo e as atividades de I&D, concluímos que a taxa de juro nominal tem um efeito positivo sobre a intensidade capitalística  $k$ , na medida em que influencia negativamente as atividades de I&D e, por essa via, o *stock* de conhecimento tecnológico (medido pelo número de variedades de bens intermédios) relativamente ao *stock* de capital físico, afetando negativamente, por seu turno, a taxa de crescimento de equilíbrio. O impacto negativo de  $i$  sobre  $g^*$  está alinhado com os resultados de Chu e Cozzi (2014). Contudo, no presente modelo, o efeito de variações da taxa de juro nominal é atenuado pelos rendimentos marginais decrescentes associados ao capital físico. Este resultado é evidente na análise quantitativa que realizámos. Para além de obtermos uma elasticidade da taxa de crescimento face à taxa de juro nominal reduzida, a consideração, baseada em diversos estudos empíricos, de proporções do capital no rendimento mais elevadas (medidas pelo parâmetro  $\alpha$ ), conduz a uma menor sensibilidade da taxa de crescimento de equilíbrio em resposta a variações da taxa de juro. Não obstante, o nosso modelo rejeita a proposição de superneutralidade da moeda, estando em conformidade com grande parte da literatura sobre este tema (Chu et al., 2012; Chu e Lai, 2013; Chu e Cozzi, 2014; Huang et al., 2013). Ressalvamos, todavia, que a análise numérica levada a cabo aponta para inelasticidade da taxa de crescimento face à taxa de juro nominal, resultado que é agravado à medida que se consideram elasticidades do produto face ao capital ( $\alpha$ ) mais elevadas. Por fim, a análise de bem-estar mostrou que a regra de Friedman é ótima.

Ainda nesta primeira fase, estendemos a nossa análise e introduzimos também uma restrição CIA no setor da produção (que se traduz num constrangimento de liquidez na acumulação de capital físico). Neste caso, o efeito da taxa de juro nominal,  $i$ , sobre a intensidade capitalística da economia,  $k$ , depende da magnitude das restrições CIA nos diferentes setores. De acordo com evidência empírica apresentada por Brown e Petersen (2009), os constrangimentos de liquidez assumem maior relevância no setor de I&D, levando-nos a inferir que  $i$  continua a afetar  $k$  positivamente. Por outro lado, a taxa de juro nominal tem um impacto negativo sobre a taxa de crescimento, independentemente

<sup>46</sup>É importante notar que a restrição CIA no consumo não tem efeito sobre a taxa de crescimento, por não ser considerada oferta de trabalho elástica. Este era um resultado previsto por Chu e Cozzi (2014).



da força relativa das restrições de liquidez. Este resultado é claramente distinto do previsto por Chu e Cozzi (2014), sendo consequência da especificação *lab-equipment* das atividades de I&D e da acumulação de capital físico enquanto componente essencial do processo de inovação no nosso modelo. O exercício numérico mostrou que a sensibilidade de  $g^*$  face a  $i$  aumenta com a consideração da restrição CIA no setor da produção. A otimalidade da regra de Friedman mantém-se nesta versão do modelo.

A última fase deste estudo consistiu na alteração do tipo de I&D realizada pelos potenciais entrantes. Assim, o conceito de inovação, anteriormente associado à expansão do número de variedades de bens intermédios, identifica-se, neste caso, com a melhoria de qualidade desses bens. Esta versão distingue-se claramente das anteriores, já que possibilita a investigação dos efeitos da política monetária sobre o crescimento, mas agora num modelo capaz de gerar dinâmica de transição. Este é um contributo importante para a literatura e, até ao limite do nosso conhecimento, apenas Huang et al. (2013) e Chu e Ji (2016) analisam os efeitos de variações da taxa de juro nominal durante a dinâmica de transição. No entanto, nenhum destes estudos admite acumulação de capital físico. O modelo, nesta variante, a par da análise numérica complementar, prevê um efeito negativo da taxa de juro nominal sobre a taxa de crescimento no curto prazo, que é reforçado durante a dinâmica de transição (potenciado pelos rendimentos marginais decrescentes do capital físico), conduzindo, por conseguinte, a uma taxa de crescimento de equilíbrio de longo prazo permanentemente mais reduzida. Os nossos resultados são, desta forma, distintos do modelo de Chu e Ji (2016), cuja previsão teórica indica, face a um aumento de  $i$ , uma diminuição da taxa de crescimento no curto prazo, seguida por uma recuperação durante o período de transição, que a leva para o nível antes do choque. Por outro lado, Huang et al. (2013) chegam a conclusões semelhantes às indicadas pelo nosso modelo para a dinâmica da taxa de crescimento da produtividade total dos fatores, na condição de a restrição CIA ser mais forte no investimento em I&D realizado pelos incumbentes (ou não existir no investimento de entrada),<sup>47</sup> o que parece não ser consistente com a evidência empírica, de acordo com os mesmos autores. No nosso modelo, a dinâmica de transição é caracterizada por uma correlação negativa entre a intensidade de I&D e a taxa de crescimento do produto per capita, que está de acordo com a evidência empírica que compara a dinâmica destas variáveis ao longo do tempo em vários países.

Como investigação futura, seria interessante estudar os efeitos da política monetária num modelo de crescimento endógeno com dois tipos de inovação ou, por exemplo, num modelo em que tanto incumbentes como potenciais entrantes pudessem investir em atividades de I&D, analisando de que forma os constrangimentos relativos de liquidez entre

<sup>47</sup>Recorde-se que, no *setup* teórico admitido por Huang et al. (2013), a inovação vertical é realizada pelos incumbentes, enquanto a horizontal é levada a cabo pelos potenciais entrantes.

estes dois grupos influenciam os resultados do modelo (que é, na sua essência, o objetivo do modelo de Huang et al. (2013)). Outro rumo possível, que não foi explorado devido a limitações de tempo e técnicas, seria o desenvolvimento da versão estocástica do modelo. Tal permitiria não só a investigação do efeito da política monetária enquanto média de um conjunto de ações por parte da autoridade monetária, como também do contributo da volatilidade na condução da política de estabilização macroeconómica para a taxa de crescimento.

## Referências

- [1] Aghion, P. e P. Howitt (1992), "A model of growth through creative destruction", *Econometrica*, Vol. 60, Nº 2, pp. 323-351.
- [2] Aghion, P. e P. Howitt (1998), *Endogenous Growth Theory*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- [3] Arnold, L. G., e W. Kornprobst (2008), "Comparative statics and dynamics of the Romer R&D growth model with quality upgrading", *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 12, Nº 5, pp. 702-716.
- [4] Barro, R. J. e X. Sala-i-Martin (2004), *Economic Growth*, 2ª Edição, Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- [5] Blackburn, K. (1999), "Can stabilisation policy reduce long-run growth?", *Economic Journal*, Vol. 109, Nº 452, pp. 67-77.
- [6] Blackburn, K. e A. Pelloni (2005), "Growth, cycles, and stabilization policy", *Oxford Economic Papers-New Series*, Vol. 57, Nº 2, pp. 262-282.
- [7] Brock, W. A. (1974), "Money and Growth: The Case of Long Run Perfect Foresight", *International Economic Review*, Vol. 15, Nº 3, pp. 750-777.
- [8] Brown, J. R. e B. C. Petersen (2009), "Why has the investment-cash flow sensitivity declined so sharply? Rising R&D and equity market developments", *Journal of Banking & Finance*, Vol. 33, Nº 5, pp. 971-984.
- [9] Chu, A. C. e G. Cozzi (2014), "R&D and economic growth in a cash-in-advance economy", *International Economic Review*, Vol. 55, Nº 2, pp. 507-524.
- [10] Chu, A. C., G. Cozzi, Y. Furukawa e C. H. Liao (2017), "Inflation and Economic Growth in a Schumpeterian Model with Endogenous Entry of Heterogeneous Firms", *MPRA Paper*, Nº 79555, Munich Personal RePEc Archive.
- [11] Chu, A. C., G. Cozzi, C. C. Lai e C. H. Liao (2015), "Inflation, R&D and growth in an open economy", *Journal of International Economics*, Vol. 96, Nº 2, pp. 360-374.
- [12] Chu, A. C. e L. Ji (2016), "Monetary policy and endogenous market structure in a schumpeterian economy", *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 20, Nº 5, pp. 1127-1145.
- [13] Chu, A. C. e C. C. Lai (2013), "Money and the Welfare Cost of Inflation in an R&D Growth Model", *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 45, Nº 1, pp. 233-249.

- [14] Chu, A. C., C. C. Lai e C. H. Liao (2012), “A tale of two growth engines: interactive effects of monetary policy and property rights”, *MPRA Paper*, N° 40372, Munich Personal RePEc Archive.
- [15] De Long, J. B. e L. H. Summers (1991), “Equipment investment and economic growth”, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 106, N° 2, pp. 445-502.
- [16] Feenstra, R. C. (1986), “Functional equivalence between liquidity costs and the utility of money”, *Journal of Monetary Economics*, Vol. 17, N° 2, pp. 271-291.
- [17] Fisher, M. E. e J. J. Seater (1993), "Long-run neutrality and superneutrality in an ARIMA framework", *American Economic Review*, Vol. 83, N° 3, pp. 402-415.
- [18] Fundo Monetário Internacional (FMI) (2007), *The globalization of labor*, in World Economic Outlook, April 2007: *Spillovers and cycles in the world economy*, Washington, DC, pp. 161–192.
- [19] Gil, P. M., A. Almeida e S. B. S. D. Castro (2017), "Rich transitional dynamics, physical capital, and technology intensity", *Oxford Economic Papers*, Vol. 69, N° 3, pp. 678-706.
- [20] Gil, P. M., P. Brito e O. Afonso (2013), “Growth and firm dynamics with horizontal and vertical R&D”, *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 17, N° 07, pp. 1438-1466.
- [21] Growiec, J. e J. Schumacher (2013), “Technological opportunity, long-run growth, and convergence”, *Oxford Economic Papers*, Vol. 65, N° 2, pp. 323-351.
- [22] Howitt, P. (1999), "Steady Endogenous Growth with Population and R. & D. Inputs Growing", *Journal of Political Economy*, Vol. 107, N° 4, pp. 715-730.
- [23] Howitt, P. (2000), "Endogenous Growth and Cross-Country Income Differences", *The American Economic Review*, Vol. 90, N° 4, pp. 829-846.
- [24] Howitt, P. e P. Aghion (1998), "Capital Accumulation and Innovation as Complementary Factors in Long-Run Growth", *Journal of Economic Growth*, Vol. 3, N° 2, pp. 111-130.
- [25] Huang, C., J. J. Chang e L. Ji (2013), “Cash-In-Advance constraint on R&D in a schumpeterian growth model with an endogenous market structure”, *IEAS Working Paper: academic research*, N° 13-A009, Institute of Economics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan.

- [26] Jones, C. I. (1995a), "Time series tests of endogenous growth models", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 110, Nº 2, pp. 495-525.
- [27] Jones, C. I. (1995b), "R&D-based models of economic growth", *Journal of political Economy*, Vol. 103, Nº 4, pp. 759-784.
- [28] Marquis, M. H. e K. L. Reffett (1994), "New Technology Spillovers into the Payment System", *The Economic Journal*, Vol. 104, Nº 426, pp. 1123-1138.
- [29] Organização Internacional do Trabalho (OIT) e Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE) (2015), *The Labour Share in G20 Economies*, Relatório preparado para o Grupo de Trabalho sobre o Emprego do G20, Antália, Turquia, 26-27 de fevereiro.
- [30] Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE) (2012), *Employment Outlook 2012*, Paris.
- [31] Pelloni, A. (1997), "Nominal shocks, endogenous growth and the business cycle", *Economic Journal*, Vol. 107, Nº 441, pp. 467-474.
- [32] Pintea, M., e P. Thompson (2007), "Technological complexity and economic growth", *Review of Economic Dynamics*, Vol. 10, Nº 2, pp. 276-293.
- [33] Ramsey, F. P. (1928), "A mathematical theory of saving", *The Economic Journal*, Vol. 38, Nº 152, pp. 543-559.
- [34] Romer, P. M. (1986), "Increasing returns and long-run growth", *Journal of Political Economy*, Vol. 94, Nº 5, pp. 1002-1037.
- [35] Romer, P. M. (1990), "Endogenous technological-change", *Journal of Political Economy*, Vol. 98, Nº 5, pp. S71-S102.
- [36] Saving, T. R. (1971), "Transactions Costs and the Demand for Money", *The American Economic Review*, Vol. 61, Nº 3, pp. 407-420.
- [37] Sedgley, N. e B. Elmslie (2013), "The dynamic properties of endogenous growth models", *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 17, Nº 5, pp. 1118-1134.
- [38] Sequeira, T. N. (2011), "R&D spillovers in an endogenous growth model with physical capital, human capital, and varieties", *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 15, Nº 2, pp. 223-239.
- [39] Sidrauski, M. (1967), "Rational choice and patterns of growth in a monetary economy", *The American Economic Review*, Vol. 57, Nº 2, pp. 534-544.

- [40] Solow, R. M. (1956), "A contribution to the theory of economic growth", *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 70, Nº 1, pp. 65-94.
- [41] Stadler, G. W. (1990), "Business-cycle models with endogenous technology", *American Economic Review*, Vol. 80, Nº 4, pp. 763-778.
- [42] Stockman, A. C. (1981), "Anticipated inflation and the capital stock in a cash-in-advance economy", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 8, Nº 3, pp. 387-393.
- [43] Tobin, J. (1965), "Money and economic-growth", *Econometrica*, Vol. 33, Nº 4, pp. 671-684.
- [44] Wang, P. e C. K. Yip (1992), "Alternative approaches to money and growth", *Journal of Money Credit and Banking*, Vol. 24, Nº 4, pp. 553-562.
- [45] Westerlund, J. e M. Costantini (2009), "Panel cointegration and the neutrality of money", *Empirical Economics*, Vol. 36, Nº 1, pp. 1-26.
- [46] Zeng, J. (2003), "Reexamining the interaction between innovation and capital accumulation", *Journal of Macroeconomics*, Vol. 25, Nº 4, pp. 541-560.

## Anexo

Código Matlab:

```
% Ficheiro com a dinâmica das variáveis endógenas

function Dinamica

% Parâmetros
theta=1.5; rho=0.02; alpha=1/3; lambda=1/alpha; zeta=3.99; A=1;
i=0.075; pi0=A*alpha*(1-alpha); Xi=lambda^(alpha/(1-alpha))-1;

% Bs
B0=A*(alpha^2)*(alpha-1);
B1=Xi*(1+alpha)*B0/(alpha*(1+i)*zeta);
B2=A*alpha*(1+Xi*alpha^2-(Xi+1)*alpha*(1-alpha)/(1+i));
B3=(Xi+1)*zeta*B0;

% k de equilíbrio (intersecção entre f1(k) f2(k))
k0=2;
k=fsolve(@(k)((1/theta)*(A*alpha^2*k^(alpha-1)-rho)...
-Xi*(pi0*k^alpha/((1+i)*zeta)-A*alpha^2*k^(alpha-1))),k0);

% c de equilíbrio
c=A*k^alpha-(zeta*(Xi+1)+Xi*k)*(pi0*k^alpha/((1+i)*zeta)-A*alpha^2*k^(alpha-1));

% gY de equilíbrio
gY=Xi*(pi0*k^alpha/((1+i)*zeta)-A*alpha^2*k^(alpha-1));

% r de equilíbrio
r_eq=A*alpha^2*k^(alpha-1);

% I de equilíbrio
I_eq=pi0*k^alpha/((1+i)*zeta)-A*alpha^2*k^(alpha-1);
```

```

disp('Equilíbrio:')
fprintf('      c:      %6.4f \n', c);
fprintf('      k:      %6.4f \n', k);
fprintf('  gY=gQ:      %6.4f \n', gY);
fprintf('      r:      %6.4f \n', r_eq);
fprintf('      I:      %6.4f \n', I_eq);

% Js
J12=B0*(1/theta+Xi*(k/((1+i)*zeta)+1))*k^(alpha-2)*c;
J22=B1*k^alpha+B2*k^(alpha-1)+B3*k^(alpha-2);

% Jacobiana
J=[ 0 J12 ;
   -1 J22];

% Traço e determinante de J
detJ=det(J);  %=J12
trJ=trace(J);  %=J22

% Cálculo dos valores próprios
[V, D]=eig(J,'noblance')
fprintf('\n') fprintf('\n')
disp('Valores Próprios:')
fprintf('  u1:      %6.4f \n', D(1,1));
fprintf('  u2:      %6.4f \n', D(2,2));
fprintf('\n')
fprintf('\n')
disp('Vetores Próprios:')
V1=V(:,1)% vetor próprio associado a u1
V2=V(:,2)% vetor próprio associado a u2

disp('Choque 1: Aumento da taxa de juro nominal para 10%')

i=0.10;

% Bs
B0=A*(alpha^2)*(alpha-1);

```



```

B1=Xi*(1+alpha)*B0/(alpha*(1+i)*zeta);
B2=A*alpha*(1+Xi*alpha^2-(Xi+1)*alpha*(1-alpha)/(1+i));
B3=(Xi+1)*zeta*B0;

% k de equilíbrio (intersecção entre f1(k) f2(k))
k1=fsolve(@(k)((1/theta)*(A*alpha^2*k^(alpha-1)-rho)...
-Xi*(pi0*k^alpha/((1+i)*zeta)-A*alpha^2*k^(alpha-1))),k0);

% c de equilíbrio
c1=A*k1^alpha-(zeta*(Xi+1)+Xi*k1)*(pi0*k1^alpha/((1+i)*zeta)-A*alpha^2*k1^(alpha-1))
;

% gY de equilíbrio
gY1=Xi*(pi0*k1^alpha/((1+i)*zeta)-A*alpha^2*k1^(alpha-1));

% r de equilíbrio
r_eq1=A*alpha^2*k1^(alpha-1);

% I de equilíbrio
I_eq1=pi0*k1^alpha/((1+i)*zeta)-A*alpha^2*k1^(alpha-1);

disp('Novo Equilíbrio:')
fprintf('      c:      %6.4f \n', c1);
fprintf('      k:      %6.4f \n', k1);
fprintf('  gY=gQ:      %6.4f \n', gY1);
fprintf('      r:      %6.4f \n', r_eq1);
fprintf('      I:      %6.4f \n', I_eq1);

% Js
J12=B0*(1/theta+Xi*(k1/((1+i)*zeta)+1))*k1^(alpha-2)*c1; J22=B1*k1^alpha+B2*k1^(
alpha-1)+B3*k1^(alpha-2);

% Jacobiana
J=[ 0 J12 ;
-1 J22];

% Traço e determinante de J

```

```

detJ=det(J);   %=J12
trJ=trace(J);   %=J22

% Cálculo dos valores próprios
[V, D]=eig(J, 'nobalance')
fprintf('\n')
fprintf('\n')
disp('Valores Próprios:')
fprintf('    u1:    %6.4f \n', D(1,1));
fprintf('    u2:    %6.4f \n', D(2,2));
fprintf('\n')
fprintf('\n')
disp('Vetores Próprios:')
V1=V(:,1)% vetor próprio associado a u1
V2=V(:,2)% vetor próprio associado a u2

% Plot de trajetórias

% A condição inicial para k é k(0)= k de SS antigo. c(0) foi calculada de
% forma a que a constante de integração associada ao valor próprio positivo seja
% nula.

t=0:100;
ci2=((k-k1)/V(2,2));

ct=V(1,2)*ci2*exp(D(2,2)*t)+c1;
kt=V(2,2)*ci2*exp(D(2,2)*t)+k1;
rt=A*alpha^2.*kt.^(alpha-1);
It=pi0.*kt.^alpha/((1+i)*zeta)-A*alpha^2.*kt.^(alpha-1); gQ=Xi.*It;

% Cálculo das 1s diferenças de kt (para ter o vetor de g_k)
ktdif=diff(kt);
ktdif(end+1)=0;
gk=ktdif./kt;

g_Y=gQ+alpha.*gk;

```

```

% Dinâmica de c(t)
A=c*ones(101); % Criação do vetor de c de SS antigo
myVector_c = A(1,:);
subplot(3,2,1);
h1=plot(t,ct,'b',t,myVector_c , 'k');
l11=legend(h1([ 2]),{'$c^{*}:i=7.5\%$'});
l12=title('$c(t)$');
l13=xlabel('$t$');
set(l11, 'Interpreter', 'latex');
set(l12, 'Interpreter', 'latex');
set(l13, 'Interpreter', 'latex');
axis([0 100 1.23 1.29])

% Dinâmica de k(t)
B=k*ones(101); % Criação do vetor de k de SS antigo
myVector_k = B(1,:);
subplot(3,2,2);
h2=plot(t,kt,'b',t,myVector_k , 'k');
l21=legend(h2([ 2]),{'$k^{*}:i=7.5\%$'});
l22=title('$k(t)$'); l23=xlabel('$t$');
set(l21, 'Interpreter', 'latex');
set(l22, 'Interpreter', 'latex');
set(l23, 'Interpreter', 'latex');
axis([0 100 3.3 3.5])

% Dinâmica de r(t)
C=r_eq*ones(101); % Criação do vetor de r de SS antigo
myVector_r = C(1,:);
subplot(3,2,3);
h3=plot(t,rt,'b',t,myVector_r , 'k');
l31=legend(h3([ 2]),{'$r^{*}:i=7.5\%$'});
l32=title('$r(t)$');
l33=xlabel('$t$');
set(l31, 'Interpreter', 'latex');
set(l32, 'Interpreter', 'latex');
set(l33, 'Interpreter', 'latex');
axis([0 100 0.0485 0.0515])

```

```

% Dinâmica de I(t)
D=I_eq*ones(101); % Criação do vetor de I de SS antigo
myVector_I =D(1,:);
subplot(3,2,4);
h4=plot(t,It,'b',t,myVector_I , 'k');
l41=legend(h4([ 2]),{'$I^{\ast}:i=7.5\%$'});
l42=title('$I(t)$');
l43=xlabel('$t$');
set(l41, 'Interpreter', 'latex');
set(l42, 'Interpreter', 'latex');
set(l43, 'Interpreter', 'latex');
axis([0 100 0.0245 0.03])

% Dinâmica de gQ(t)
E=gY*ones(101); % Criação do vetor de g_Q de SS antigo
myVector_Q = E(1,:);
subplot(3,2,5);
h5=plot(t,gQ,'b',t,myVector_Q , 'k');
l51=legend(h5([ 2]),{'$g_{Q}^{\ast}:i=7.5\%$'});
l52=title('$g_{Q}(t)$');
l53=xlabel('$t$');
set(l51, 'Interpreter', 'latex');
set(l52, 'Interpreter', 'latex');
set(l53, 'Interpreter', 'latex');
axis([0 100 0.0185 0.0215])

% Dinâmica de gY(t)
F=gY*ones(101); % Criação do vetor de gY de SS antigo
myVector_Y = F(1,:);
subplot(3,2,6);
h6=plot(t,g_Y,'b',t,myVector_Y , 'k');
l61=legend(h6([ 2]),{'$g_{Y}^{\ast}:i=7.5\%$'});
l62=title('$g_{Y}(t)$');
l63=xlabel('$t$');
set(l61, 'Interpreter', 'latex');
set(l62, 'Interpreter', 'latex');

```

```
set(l63, 'Interpreter', 'latex');
axis([0 100 0.0192 0.0206])
```

```
end
```

```
% Ficheiro com o Diagrama de Fase
```

```
function Diagrama_Fase
```

```
% Parâmetros
```

```
theta=1.5; rho=0.02; alpha=1/3; lambda=1/alpha; zeta=3.99; A=1;
i=0.075; pi0=A*alpha*(1-alpha); Xi=lambda^(alpha/(1-alpha))-1;
```

```
% k de equilíbrio (intersecção entre f1(k) f2(k))
```

```
k0=2;
k_eq=fsolve(@(k)((1/theta)*(A*alpha^2*k^(alpha-1)-rho)...
-Xi*(pi0*k^alpha/((1+i)*zeta)-A*alpha^2*k^(alpha-1))),k0);
```

```
% Representação gráfica do k de SS
```

```
figure()
fplot(@(k)[(1/theta)*(A*alpha^2*k^(alpha-1)-rho),Xi*(pi0*k^alpha/...
((1+i)*zeta)-A*alpha^2*k^(alpha-1))],[0 5 0 0.2])
l1=legend('$f_{1}(k)$','$f_{2}(k)$');
l2=xlabel('$k$');
l3=ylabel('$f(k)$');
set(l1, 'Interpreter', 'latex');
set(l2, 'Interpreter', 'latex');
set(l3, 'Interpreter', 'latex');
```

```
% c de equilíbrio
```

```
c_eq=A*k_eq^alpha-(zeta*(Xi+1)+Xi*k_eq)*(pi0*k_eq^alpha/((1+i)*zeta)-A*alpha^2*k_eq
^(alpha-1));
```

```
%Bs
```

---

```

B0=A*(alpha^2)*(alpha-1);
B1=Xi*(1+alpha)*B0/(alpha*(1+i)*zeta);
B2=A*alpha*(1+Xi*alpha^2-(Xi+1)*alpha*(1-alpha)/(1+i));
B3=(Xi+1)*zeta*B0;

% Js
J12=B0*(1/theta+Xi*(k_eq/((1+i)*zeta)+1))*k_eq^(alpha-2)*c_eq;
J22=B1*k_eq^alpha+B2*k_eq^(alpha-1)+B3*k_eq^(alpha-2);

% Jacobiana
J=[ 0 J12 ;
-1 J22];

% Traço e determinante de J
detJ=det(J); %=J12
trJ=trace(J); %=J22

% Cálculo dos valores próprios
[V, D]=eig(J,'nobalance');

% Diagrama de Fase: Projeção de subespaço estável
t=0:100;
ci2=((3.23-k_eq)/V(2,2));

ct=V(1,2)*ci2*exp(D(2,2)*t)+c_eq;
kt=V(2,2)*ci2*exp(D(2,2)*t)+k_eq;

figure()
plot(kt,ct,'k')
axis([3.05 3.6 1.2 1.3])
hold on
fplot(@(k) A*k^alpha-(zeta*(Xi+1)+Xi*k)*(pi0*k^alpha/((1+i)*zeta)-A*alpha^2*k^(alpha-1)),[3.05 3.6 1.2 1.3],'b'); %k_dot=0
hold on
plot([k_eq k_eq],get(gca,'ylim'),'r') hold on % c_dot=0

i=0.10;

```

```

% Bs
B0=A*(alpha^2)*(alpha-1);
B1=Xi*(1+alpha)*B0/(alpha*(1+i)*zeta);
B2=A*alpha*(1+Xi*alpha^2-(Xi+1)*alpha*(1-alpha)/(1+i));
B3=(Xi+1)*zeta*B0;

% k de equilíbrio
k0=2;
k1=fsolve(@(k)((1/theta)*(A*alpha^2*k^(alpha-1)-rho)...
-Xi*(pi0*k^alpha/((1+i)*zeta)-A*alpha^2*k^(alpha-1))),k0);

% c de equilíbrio
c1=A*k1^alpha-(zeta*(Xi+1)+Xi*k1)*(pi0*k1^alpha/((1+i)*zeta)-A*alpha^2*k1^(alpha-1))
;

% Js
J12=B0*(1/theta+Xi*(k1/((1+i)*zeta)+1))*k1^(alpha-2)*c1;
J22=B1*k1^alpha+B2*k1^(alpha-1)+B3*k1^(alpha-2);

% Jacobiana
J=[ 0 J12 ;
-1 J22];

% Traço e determinante de J
detJ=det(J); %J12
trJ=trace(J); %J22

% Cálculo dos valores próprios
[V, D]=eig(J,'nobalance');

% Diagrama de Fase: Projeção de subespaço estável
t=0:100;
ci2=((k_eq-k1)/V(2,2));

ct=V(1,2)*ci2*exp(D(2,2)*t)+c1;
kt=V(2,2)*ci2*exp(D(2,2)*t)+k1;

```

```

plot(kt,ct,'k--')
axis([3.05 3.6 1.2 1.3])
h1=xlabel('$k$');
set(h1, 'Interpreter', 'latex');
h2=ylabel('$c$');
set(h2, 'Interpreter', 'latex');
hold on

fplot(@(k) A*k^alpha-(zeta*(Xi+1)+Xi*k)*(pi0*k^alpha/((1+i)*zeta)-A*alpha^2*k^(alpha-1)),[3.05 3.6 1.2 1.3],'b--');
hold on

plot([k1 k1],get(gca,'ylim'),'r--');
h3 = legend('$W^{s}\;;\;;i=7.5\%$', '$\dot{k}=0:i=7.5\%$', '$\dot{c}=0:i=7.5\%$', '$W^{s}\;;\;;i=10\%$', '$\dot{k}=0: i=10\%$', '$\dot{c}=0:i=10\%$');
set(h3, 'Interpreter', 'latex');
hold on
plot(k_eq,c_eq,'k.')
hold on
plot(k1,c1,'k.')
hold on
p_text1='$ (k^{*},c^{*})_{0}$';
text(3.32, 1.232, p_text1, 'Interpreter', 'Latex', 'FontWeight', 'bold');
p_text2='$ (k^{*},c^{*})_{1}$';
text(3.34, 1.255, p_text2, 'Interpreter', 'Latex', 'FontWeight', 'bold')
hold on

% Condições iniciais diferentes

i=0.075;

% k de equilíbrio
k0=2;
k_eq=fsolve(@(k)((1/theta)*(A*alpha^2*k^(alpha-1)-rho)...
-Xi*(pi0*k^alpha/((1+i)*zeta)-A*alpha^2*k^(alpha-1))),k0);

% c de equilíbrio

```



```
c_eq=A*k_eq^alpha-(zeta*(Xi+1)+Xi*k_eq)*(pi0*k_eq^alpha/((1+i)*zeta)-A*alpha^2*k_eq
^(alpha-1));
```

```
%Bs
```

```
B0=A*(alpha^2)*(alpha-1);
B1=Xi*(1+alpha)*B0/(alpha*(1+i)*zeta);
B2=A*alpha*(1+Xi*alpha^2-(Xi+1)*alpha*(1-alpha)/(1+i));
B3=(Xi+1)*zeta*B0;
```

```
% Js
```

```
J12=B0*(1/theta+Xi*(k_eq/((1+i)*zeta)+1))*k_eq^(alpha-2)*c_eq;
J22=B1*k_eq^alpha+B2*k_eq^(alpha-1)+B3*k_eq^(alpha-2);
```

```
% Jacobiana
```

```
J=[ 0 J12 ;
-1 J22];
```

```
% Traço e determinante de J
```

```
detJ=det(J); %=J12
trJ=trace(J); %=J22
```

```
% Cálculo dos valores próprios
```

```
[V, D]=eig(J,'nobalance');
```

```
% Diagrama de Fase: Projeção de subespaço estável
```

```
t=0:100;
ci2=((3.39-k_eq)/V(2,2));

ct=V(1,2)*ci2*exp(D(2,2)*t)+c_eq;
kt=V(2,2)*ci2*exp(D(2,2)*t)+k_eq;
plot(kt,ct,'k')
axis([3.05 3.6 1.2 1.3])
hold on
```

```
i=0.10;
```

```
% Bs
```

```

B0=A*(alpha^2)*(alpha-1);
B1=Xi*(1+alpha)*B0/(alpha*(1+i)*zeta);
B2=A*alpha*(1+Xi*alpha^2-(Xi+1)*alpha*(1-alpha)/(1+i));
B3=(Xi+1)*zeta*B0;

% k de equilíbrio (intersecção entre f1(k) f2(k))
k0=2;
k1=fsolve(@(k)((1/theta)*(A*alpha^2*k^(alpha-1)-rho)...
-Xi*(pi0*k^alpha/((1+i)*zeta)-A*alpha^2*k^(alpha-1))),k0);

% c de equilíbrio
c1=A*k1^alpha-(zeta*(Xi+1)+Xi*k1)*(pi0*k1^alpha/((1+i)*zeta)-A*alpha^2*k1^(alpha-1))
;

% Js
J12=B0*(1/theta+Xi*(k1/((1+i)*zeta)+1))*k1^(alpha-2)*c1;
J22=B1*k1^alpha+B2*k1^(alpha-1)+B3*k1^(alpha-2);

% Jacobiana J=[ 0 J12 ;
-1 J22];

% Traço e determinante de J
detJ=det(J); %=J12
trJ=trace(J); %=J22

% Cálculo dos valores próprios
[V, D]=eig(J,'nobalance');

% Diagrama de Fase: Projeção de subespaço estável
t=0:100;
ci2=((3.45-k1)/V(2,2));

ct=V(1,2)*ci2*exp(D(2,2)*t)+c1;
kt=V(2,2)*ci2*exp(D(2,2)*t)+k1;

plot(kt,ct,'k--')
axis([3.05 3.6 1.2 1.3])

```

```
hold on
p_text1='$(k^{*},c^{*})_{0}$';
text(3.32, 1.232, p_text1, 'Interpreter', 'Latex','FontWeight','bold');
p_text2='$(k^{*},c^{*})_{1}$';
text(3.34, 1.255, p_text2, 'Interpreter', 'Latex','FontWeight','bold');

end
```